

Ayudantía I: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En esta ayudantía veremos en que consiste una EDO, haciendo énfasis en la ecuación $x'(t) = f(x(t), t)$ para cierta función f , y verificaremos que ciertas funciones son soluciones a ciertas ecuaciones.

Problema 1: Compruebe que las funciones indicadas son solución a las ecuaciones diferenciales dadas.

- a) $\{\varphi(t), \psi(t)\} = \{\sin(t), 0\}$ es solución de $x''(t) + x(t) = 0$.
- b) $\varphi(t) = (2a)^{-1}(e^{at} + e^{-at})$ es solución de $x''(t) = a\sqrt{1 + (x'(t))^2}$.
- c) $\varphi(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ es solución de $\frac{d^4x}{dt^4}(t) = 0$ para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Solución: Basta con entender que φ es solución si verifica las ecuaciones dadas, o sea, al reemplazar las x 's por φ 's debiese tenerse la igualdad.

Ejercicio 1: Verifique que el conjunto $\{1, t, \dots, t^{n-1}\}$ es solución a la ecuación $\frac{d^n x}{dt^n} = 0$. ¿Qué puede decir en relación a la dependencia lineal del conjunto?

Problema 2: Halle una solución ψ de $x'(t) + x(t) = \sin(t)$ de la forma $C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$ para ciertas constantes reales C_1, C_2 .

Solución: Reemplazando x por ψ en la ecuación podemos llegar a algo del estilo

$$\cos(t)[C_1 + C_2] + \sin(t)[C_1 - C_2] = \sin(t)$$

donde si las constantes son tales que $C_1 + C_2 = 0$ y $C_1 - C_2 = 1$ encontramos la solución pedida.

Problema 3: Encuentre $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la función $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto ate^{bt^2}$ sea solución al problema de Cauchy:

$$\begin{aligned}x'(t) &= \left(6t + \frac{1}{t}\right)x(t) \\x(5) &= 10\end{aligned}$$

Solución: Basta con notar que $\varphi'(t) = ae^{bt^2}(1 + 2bt^2)$ y que $(6t + \frac{1}{t})\varphi(t) = ae^{bt^2}(6t^2 + 1)$ para que al hacer la igualdad $\varphi'(t)$ con $(6t^2 + 1)\varphi(t)$ (¿Por qué hacer esta igualdad?) se desprenda el valor de b . Finalmente, usando la condición inicial (φ debe satisfacer $\varphi(5) = 10$) obtenemos el valor de a .

Ejercicio 2: Encuentre familias de soluciones a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}x'(t) &= g(t) \\y'(t) &= 3y(t)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

Si además hacemos de estas ecuaciones problemas de Cauchy, o sea, les agregamos una condiciones inicial. ¿Tenemos unicidad de soluciones? Justifique.