PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Manuel Calvo

CURSO 2005/06

Índice general

Prefacio

Esta colección de ejercicios tiene como objetivo básico servir de complemento a la asignatura de Ecuaciones Diferenciales para alumnos de Matemáticas de segundo curso en el vigente plan de estudios de la Facultad de Ciencias de Zaragoza.

Puesto que es una asignatura cuatrimestral de carácter introductorio, se insiste especialmente en los métodos elementales de integración , en los sistemas y ecuaciones lineales, en los aspectos relacionados con la existencia, unicidad y prolongación de soluciones y, como no, se hace una breve introducción a la teoría cualitativa ya que este tópico se estudia en detalle en otro curso posterior. Posiblemente los ejercicios mas dificultosos para los alumnos resulten los relativos a la existencia, unicidad y prolongación de soluciones, pero creemos que su resolución ayuda a profundizar y analizar con rigor los teoremas básicos de la teoría de EDOs y, en nuestra opinión, este aspecto es esencial en la formación matemática.

Se han incluido solamente los enunciados de los ejercicios con la idea de que aquellos que no se resuelvan en clase sirvan como material para el trabajo individual del alumno.

El autor quiere manifestar, en primer lugar, su sincero agradecimiento a los alumnos de los últimos cursos por sus observaciones y sugerencias que han motivado la revisión y mejora de la colección. En segundo lugar a los compañeros del Departamento, en particular a Leandro Moral, por ayuda y colaboración en la elaboración del material.

Capítulo 1

MÉTODOS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

1.1. Ecuaciones de variables separables

1) Calcula, por separación de variables, la solución general de las siguientes ecuaciones de primer orden. Además, en caso de dar condiciones iniciales, determina las soluciones de los problemas de valor inicial (PVI) así como su intervalo maximal de definición.

1)........... $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+1}{2-2y}, \qquad y(-3)=4, \qquad y(-3)=-2.$

2)........... $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}, \qquad y(1)=2$

3)........... $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x+3xy^2}{yx^2+2y}.$

4)........... $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{x^2+x^2y^2}{y^2+x^2y^2}}.$

5)........... $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+xy^2}{4y}, \qquad y(1)=0.$

6)........... $\dfrac{dy}{dx} = -3y\cot(x), \qquad y(\pi/2) = 2.$

7)........... $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\operatorname{sen}^2 y}{\cos^2 x}, \qquad y(\pi/4) = \pi/4.$

8)........... $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x^3y^2 + x^3}.$

9)........... $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x + xy^2}{2y + x^2y}, \qquad y(2) = 1.$

10)........... $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(y^2 + 2y - 3)(x - 2)}{(x^2 + 2x - 3)(y - 2)},$

11)........... $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta + e^{2r}\operatorname{sen}\theta}{3e^r + e^r\cos\theta}, \qquad r(\pi/2) = 0.$

---

2) La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - x^4}{4xy},$$

no es separable. Comprueba que la transformación $y \to v$ dada por $y = vx$ convierte la ecuación anterior en otra de variables separables. Resuelve la nueva ecuación y calcula la solución general de la ecuación original.

---

3) Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,f(xy)}{x\,g(xy)},$$

no es separable. Sin embargo comprueba que la transformación $y \to v$ dada por $y = v/x$ convierte la ecuación anterior en otra separable. Aplica esta técnica para calcular la solución general de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2y}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1 - xy + x^2y^2}{x^2 - x^3y}.$$

1.2. Problemas de ecuaciones homogéneas

1) Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones homogéneas. En el caso de dar condiciones iniciales calcula la solución particular y su intervalo maximal de definición

$$1)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2y^2-x^2}{xy}.$$

$$2)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3xy+2y^2}{x^2}.$$

$$3)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx}=\frac{xy-3(x^2+y^2)\arctan(y/x)}{x^2}.$$

$$4)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y\,\mathrm{sen}(y/x)+x}{x\,\mathrm{sen}(y/x)}.$$

$$5)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y+2x\exp(-y/x)}{x}.$$

$$6)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3x+2y}{x}, \qquad y(1)=2.$$

$$7)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

$$8)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^3}{xy^2}, \qquad y(1)=1.$$

---

2) Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones reducibles a homogéneas.

$$1)\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx}=\frac{x+y+4}{x-y-6}. \qquad 2)\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x+4y+2}.$$

$$3)\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx}=\frac{x+y+4}{x+y-6}. \qquad 4)\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y-1}{4x+6y}.$$

---

3) Haciendo un cambio $y \to u$ del tipo $u = y/x^n$ con exponente n adecuado calcula la solución general de las siguientes ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-xy^2}{2x^2y}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y-xy^2}{x+x^2y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2+3xy^2}{4x^2y}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1-2xy-2x^2y-2x^3y^2-3x^4y^2}{x^2(1+x)(1+yx^2)}.$$

1.3. Ecuaciones lineales

1) Describe el conjunto de soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales

1)........... $$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x-1}\right) y + x$$

2)........... $$\frac{dy}{dx} + (\log x)y = \log x \left(\frac{2}{x} + (\log x)^2\right)$$

3)........... $$x\frac{dy}{dx} + 2y = 3$$

4)........... $$y' = 2y + x^2 + 5$$

5)........... $$(1+e^x)\frac{dy}{dx} + e^x\ y = 0$$

6)........... $$(1-x^3)\ \frac{dy}{dx} = 3x^2\ y$$

7)........... $$\frac{dy}{dx} + \cot(x)y = 2\cos x$$

8)........... $$x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$$

9)........... $$(1-\cos x)\ dy + (2y\ \operatorname{sen} x - \tan x)\ dx = 0$$

10)........... $$y\ dx + (xy + 2x - y\ e^y)\ dy = 0$$

11)........... $$(x-1)\frac{dy}{dx} + (x+1)y = x^3 + 3x^2 - 2x$$

12)........... $$x^3\frac{dy}{dx}+(2-3x^2)y=x^3$$

13)........... $$y\ln y\ dx+(x-\ln y)\ dy=0$$

14)........... $$\frac{dy}{dx}+\cot x\ y=5\ e^{\cos x}$$

15)........... $$dr+(2r\cot\theta+\operatorname{sen}(2\theta))\ d\theta=0$$

16)........... $$y(1+y^2)\ dx=2(1-2xy^2)\ dy$$

17)........... $$(1+\operatorname{sen} y)\ dx=[2y\cos y-x(\sec y+\tan y)]\ \ dy$$

1.4. Ecuaciones diferenciales exactas

1) Escribe cada una de las siguientes ecuaciones en la forma $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, comprueba su exactitud y resuelve aquellas que sean exactas.

1)........... $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y^2}{2xy+y}$.

2)........... $2\ xy\ y'=x^2-y^2$.

3)........... $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{x+y}$.

4)........... $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y\cos x}{\operatorname{sen} x+y}$.

5)........... $(ye^{-x}-\operatorname{sen} x)dx-(e^{-x}+2y)dy=0$.

6)........... $\left(x^2+\dfrac{y}{x}\right)dx+(\log x+2y)dy=0$.

7)........... $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(y-e^x)}{e^x-2xy}$.

8)........... $(x^2+x)dy+(2xy+1+2\cos x)dx=0$.

9)........... $(x\sqrt{x^2+y^2}-y)dx+(y\sqrt{x^2+y^2}-x)dy=0$.

10).......... $(4x^3y^3+1/x)dx+(3x^4y^2-1/y)dy=0$.

11).......... $\left(y^2 - \dfrac{y}{x(x+y)} + 2\right) dx + \left(\dfrac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right) dy = 0.$

12).......... $\left(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1\right) dx + \left(x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y\right) dy = 0.$

---

2) Resuelve las siguientes ecuaciones con las condiciones iniciales indicadas y determina su intervalo maximal de definición

1).......... $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 2x}{2y - 2xy}, \quad y(1) = 2.$

2).......... $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - \operatorname{sen} y}{x \cos y}, \quad y(2) = 0.$

3).......... $2xydx + (x^2 + 1)dy = 0, \quad y(1) = -3.$

4).......... $(x^2 + 2ye^{2x})y' + 2xy + 2y^2e^{2x} = 0, \quad y(1) = 1.$

5).......... $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\operatorname{sen}(2x) - \tan y}{x \sec^2(y)}, \quad y(\pi) = \pi/4.$

---

3) Para cada una de las ecuaciones siguientes, obtener un factor integrante de la forma indicada y resolverlas

1).......... $(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0, \qquad \mu = \mu(x^2 + y^2).$

2).......... $(2y - 3x)dx + xdy = 0, \qquad \mu = \mu(x).$

3).......... $(3x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0, \qquad \mu = \mu(x).$

4).......... $(xy - 2y^2)dx - (x^2 - 3xy)dy = 0, \qquad \mu = x^\alpha y^\beta.$

5).......... $(4xy + 3y^4)dx + (2x^2 + 5xy^3)dy = 0, \qquad \mu = x^\alpha y^\beta.$

6).......... $(8y + 4x^2y^4)dx + (8x + 5x^3y^3)dy = 0, \qquad \mu = x^\alpha y^\beta.$

7).......... $(y + x^3y + 2x^2)dx + (x + 4xy^4 + 8y^3)dy = 0, \qquad \mu = \mu(xy).$

---

4) Dada la ecuación diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, donde P y Q son funciones homogéneas del mismo grado,

- Prueba que $\mu = \dfrac{1}{xP + yQ}$ es un factor integrante de dicha ecuación supuesto $xP(x,y) + yQ(x,y) \not\equiv 0$.
- Estudia el caso $xP + yQ \equiv 0$.
- Aplica el ejercicio anterior a la resolución de las ecuaciones

$$1) \qquad y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0,$$

$$2) \qquad (x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0.$$

---

5) Dada la ecuación

$$Pdx + Qdy \equiv yf_1(xy)dx + xf_2(xy)dy = 0$$

con $xP - yQ = xy(f_1(xy) - f_2(xy)) \not\equiv 0$,

- Prueba que $\dfrac{1}{(xP - yQ)}$ es un factor integrante en el conjunto apropiado.
- Aplica el ejercicio anterior a la resolución de las ecuaciones

$$1) \qquad y(x^2y^2 + 2)dx + x(2 - 2x^2y^2)dy = 0,$$

$$2) \qquad y(2xy + 1)dx + x(1 + 2xy - x^3y^3)dy = 0.$$

Algunos tipos de factores integrantes

Condición sobre la ED	Factor Integrante
$\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = g(x)$	$\mu(x) = \exp\left(\int g\right)(x)$
$\dfrac{P_y - Q_x}{P} = -g(y)$	$\mu(y) = \exp\left(\int g\right)(y)$
$\dfrac{P_y - Q_x}{Q - P} = g(x+y)$	$\mu(x+y) = \exp\left(\int g\right)(x+y)$
$\dfrac{P_y - Q_x}{P + Q} = g(x-y)$	$\mu(x-y) = \exp\left(\int g\right)(x-y)$
$\dfrac{P_y - Q_x}{yQ - xP} = g(xy)$	$\mu(xy) = \exp\left(\int g\right)(xy)$
$\dfrac{P_y - Q_x}{xQ - yP} = g(x^2+y^2)$	$\mu(x^2+y^2) = \exp\left((1/2)\int g\right)(x^2+y^2)$
$\dfrac{nQ}{x} - \dfrac{mP}{y} = P_y - Q_x$	$\mu(x,y) = x^n\, y^m$

---

6) Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales buscando un factor integrante adecuado para cada ejercicio

1) $x\,dx + (y + 4y^3x^2 + 4y^5)\,dy = 0.$

2) $(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\,dx + y\,dy = 0$

3) $\left(xy + \sqrt{1 - x^2y^2}\right)\,dx + x^2\,dy = 0$

4) $\left(y^2 - \dfrac{y}{x(x+y)} + 2\right)\,dx + \left(\dfrac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)\,dy = 0.$

5) $(\tan y - \tan^2 y\,\cos x)\,dx - x\sec^2 y\,dy = 0.$

6) $xy' + y\log x = y\log y + y.$

---

7) Prueba que si μ y ν son dos factores integrantes independientes de $Pdx + qdy = 0$ entonces su solución general es $\mu = c\nu$. Ilustra el resultado calculando dos factores integrantes de $xdy - ydx = 0$.

8) Prueba que si la ecuación $Pdx + Qdy = 0$ es exacta y homogénea su solución general es $Px + Qy = c$. aplica el resultado a la ecuación $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$.

1.5. Ecuaciones de tipo Bernoulli

1) Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones de Bernoulli

1) $y' - y = xy^5$

2) $y' + 2xy + xy^4 = 0$

3) $y' + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4$

4) $y' + y = y^2(\cos x - \operatorname{sen} x)$

5) $xy' = y + xy^3(1 + \log x)$

6) $xy' + y = x^3y^6$

7) $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} + x^3 \cos y = 0$

8) $y^2 + (xy - x^3)y' = 0$

1.6. Campos de pendientes de ecuaciones diferenciales

1) Dado el siguiente campo de pendientes de una ecuación diferencial

dibuja aproximadamente algunas curvas solución de dicha ecuación

---

2) Usando el campo de pendientes de la ecuación diferencial, haz un esbozo del espacio de fases de las siguientes ecuaciones

$$
\begin{array}{ll}
1) & y' = y^3 - y \\
2) & y' = y \cos y \\
3) & y' = \dfrac{y^4 - 5y^2 + 4}{y^2} \\
4) & y' = \sqrt{y \ \operatorname{sen} y} \\
5) & y' = \dfrac{\operatorname{sen} y}{y}
\end{array}
$$

---

3) El campo de pendientes de la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2$ para $x \in [-2, 2], y \in [-1, 1]$ es

- Dibuja algunas curvas integrales de dicho campo.
- Prueba que si $y(x)$ es solución definida en $[0, a)$, $-y(x)$ también es solución en $x \in (-a, 0]$ y por tanto las curvas solución son simétricas respecto al origen.
- Prueba que toda solución $y(x)$ explota en tiempo finito, es decir existe $0 < \tau < +\infty$ tal que
$$\lim_{x \to \tau} |y(x)| = +\infty$$

---

4) El campo de pendientes de la ecuación homogénea $y' = 1 + (y/x)$ para $x \in [0, 2], y \in [-1, 1]$ tiene la forma

Esboza algunas curvas solución. Resuelve la ecuación por métodos analíticos y compara con el comportamiento geométrico.

1.7. Trayectorias ortogonales a una familia de curvas

1) Halla la familia de curvas ortogonal a la familia de círculos con centro en el eje OX y que pasan por el origen.

---

2) Halla las trayectorias ortogonales a la familia de círculos que pasan por los puntos $(1, 9)$ y $(0, -1)$.

---

3) Calcula las trayectorias ortogonales a las siguientes familias de curvas

$$
\begin{array}{llll}
1) & xy = C & 2) & y = C\,x^2 \\
3) & y = C\,e^x & 4) & y = C\,x^4 \\
5) & y^2 = 4C(x+C) & 6) & y^2 = \dfrac{x^3}{C-x}
\end{array}
$$

---

4) Prueba que las trayectorias ortogonales a una familia de curvas dada en las coordenadas polares ρ y θ por la ecuación diferencial

$$\frac{d\rho}{d\theta} = f(\rho, \theta)$$

verifica la ecuación

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\rho^2}{f(\rho, \theta)}$$

---

5) Calcula las trayectorias ortogonales a las siguientes familias de curvas

$$
\begin{array}{llll}
1) & \rho = 2C\ \operatorname{sen}\theta & 2) & \rho = \dfrac{C}{1-\cos\theta} \\
3) & \rho = C(\sec\theta + \tan\theta) & &
\end{array}
$$

---

6) La familia de curvas que forma un ángulo α con otra familia Γ dada por $f(x, y, y') = 0$ verifica

$$f\left(x, y, \left(\frac{y' - \tan\alpha}{1 + y'\ \tan\alpha}\right)\right) = 0.$$

Calcula la familia de curvas que forma un ángulo de 45 grados con la familia de círculos de centro el origen.

---

7) Calcula la familia de curvas que forma un ángulo de 45 grados con la familia de circunferencias cuyo centro está situado en la bisectriz del primer cuadrante y pasan por el origen.

Capítulo 2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

2.1. Sistemas lineales con coeficientes constantes

1) Calcula la solución general de los siguientes sistemas diferenciales lineales:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 5\cos t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -8e^t \\ -33e^t \\ -8e^t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 4 \\ -17 & 9 & 7 \\ -11 & 5 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 0 \\ 18 & -5 & 0 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -9 & 4 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 13 & -7 & 5 \\ 28 & -14 & 9 \\ 12 & -6 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3(-6+t)e^{-t} \\ -2(6+t)e^{-t} \\ 4(-10+t)e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 15 & 9 & 15 \\ 10 & 10 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 9 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \frac{\exp(t)}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -2 & 8 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \exp(t) \begin{pmatrix} -13 \\ -16 \\ -32 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -15 & 7 & 3 \\ -7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

---

2) Calcula la solución de los siguientes problemas de valores iniciales:

a)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 9 \\ -38 & -15 & -36 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

---

3) Calcular las soluciones generales de los siguientes sistemas lineales con coeficientes constantes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

donde la matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ y la función vectorial $\mathbf{b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ están dados respectivamente por:

1-1)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ t-1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1-2)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = (e^t + \cos t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1-3)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1-4)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1-5)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1-6)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1-7)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 8 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{4t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1-8)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1-9)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ 0 \\ 0 \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}.$$

---

4) Resuelve el siguiente sistema lineal homogéneo

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

y encuentra los subespacios bidimensionales $S \subset \mathbb{R}^4$ invariantes por el flujo del espacio fásico, es decir tales que si $\mathbf{x}(t_0) \in S$ para algún t_0 entonces $\mathbf{x}(t) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

---

5) Dada la ecuación lineal

$$y'(x) = -ay(x) + q(x), \tag{1}$$

donde $a > 0$ es constante y q es una función continua en $[0, +\infty)$ tal que existe

$$\lim_{x \to +\infty} q(x) = b.$$

Probar que para toda condición inicial $y(0) = y_0$, la única solución de (1) definida para todo $x \geq 0$ verifica

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \frac{b}{a} \tag{2}$$

---

6) Dado el sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

i) ¿Cuántas soluciones periódicas linealmente independientes tiene ?

ii) ¿Son periódicas todas las soluciones ?

---

7) Dados los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,0)^T, \mathbf{u}_2 = (0,1,1)^T, \mathbf{u}_3 = (1,1,1)^T,$$

(a) Determinar $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que las soluciones $\varphi(t)$ del sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ satisfagan:

(i) Si $\varphi(0) \in \mathbb{R}^3$ se encuentra en el subespacio engendrado por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ entonces existe

$$\lim_{|t|\to+\infty} \varphi(t)$$

(ii) Si $\varphi(0) = \mathbf{u}_3$ entonces existe

$$\lim_{|t|\to+\infty} \exp(-2t)\varphi(t).$$

(b) Calcula una solución particular del sistema lineal

$$x' = \mathbf{A}\mathbf{x} + (t^2, t, 1)^T.$$

---

8) Sea φ la solución de la ecuación diferencial de orden n con coeficientes constantes

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = 0,$$

que verifica las condiciones iniciales

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-2)}(0) = 0, \quad x^{(n-1)}(0) = 1.$$

Demostrar que $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}$ es un sistema fundamental de soluciones de dicha ecuación. ¿ Puede deducirse de lo anterior que toda ecuación de orden n con coeficientes constantes tiene una matriz fundamental simétrica?

9) Resuelve el sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

10) Resuelve el sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

---

11) Resuelve el sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.2. Sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes variables

1) (a) Resolver la ecuación diferencial

$$t(1-t^2)y'(t) + (2t^2-1)y(t) = t^3,$$

analizando separadamente los casos $|t| < 1$ y $|t| > 1$.
(b) Discutir la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial de la ecuación anterior junto a la condición inicial $y(t_0) = y_0$, según los valores de t_0, y_0. ¿ Qué condiciones deben imponerse sobre t_0, y_0 para que el correspondiente PVI admita solución global $y \in C^1(\mathbb{R})$.

2) Sea el sistema lineal $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$ donde $\mathbf{A}(t)$ es continua en un intervalo J de $\mathbb{R}$ y verifica $\mathbf{A}^*(t) = -\mathbf{A}(t), (\mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}^T)$. Probar que si una matriz fundamental es unitaria para un punto de J lo es para todo punto de J.

3) Determinar la solución general del sistema

$$\begin{cases} x' = (3t-1)x - (1-t)y + t\exp(t^2) \\ y' = -(t+2)x + (t-2)y - \exp(t^2) \end{cases}$$

sabiendo que el sistema homogéneo tiene una solución de la forma

$$(x(t), y(t)) = (\phi(t), -\phi(t)).$$

4) Sea la ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes variables

$$L(x) = a_0(t)\, x'' + a_1(t)\, x' + a_2(t)\, x = 0, \tag{1}$$

donde $a_0(t) \neq 0, t \in J, a_i(t) \in C(J)$, J intervalo de $\mathbb{R}$ y supongamos que $\varphi(t)$ es una solución de (1) tal que $\varphi(t) \neq 0$ en J. Verificar que el cambio $x \longrightarrow y$ dado por $x = y\varphi(t)$, permite reducir la resolución de la ecuación (1) a otra de primer orden mas una cuadratura. Calcular una segunda solución de (1) linealmente independiente de $\varphi(t)$.

5) Sabiendo que la ecuación $(t^2-1)x'' - 2tx' + 2x = 0$ tiene la solución $x(t) = t^2 + 1$. Hallar su solución general.

6) Calcular la solución general de $(\operatorname{sen}^2 t)\ y'' - 2\operatorname{sen} t\ \cos t\ y' + (1 + \cos^2 t)\ y = 0$, sabiendo que la razón de dos soluciones independientes es t.

7) Calcular la solución general de $t^2\ y'' - t(t+2)\ y' + (t+2)\ y = 0$, sabiendo que tiene dos soluciones particulares cuyo cociente es e^t.

8) Dada la ecuación de segundo orden $y'' - t^{-1}y' + f(t)y = 0$. Hallar f de tal manera que existan dos soluciones tales que una sea el cuadrado de la otra.

9) Calcular la solución general de la ecuación

$$t^2x'' - 2x = t^3\ e^t. \tag{1}$$

2.3. Sistemas lineales con coeficientes periódicos (Teoría de Floquet)

1) Probar que si λ es un multiplicador asociado a un sistema lineal con coeficientes periódicos de periodo τ, existe un exponente característico μ tal que $\exp(\tau\mu) = \lambda$ y recíprocamente.

2) Probar que si λ es un multiplicador real del sistema τ-periódico $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$ existe al menos una solución $\varphi(t)$ tal que $\varphi(t+\tau) = \lambda\varphi(t)$.

3) Sea $\mathbf{Y}(t)$ matriz fundamental unidad de $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$ donde $\mathbf{A}(t)$ es $\tau-$periódica. Probar que existen $n-r$ soluciones periódicas linealmente independientes si y solo si rang $(\mathbf{Y}(\tau) - \mathbf{I}) = r$.

4) Dado el sistema lineal

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen}^2 t - 1 & 3\operatorname{sen} t\ \cos t + 1 \\ 3\operatorname{sen} t\ \cos t - 1 & 3\cos^2 t - 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{1}$$

- i) Sin integrar, probar que existe al menos una solución no acotada para $t \to +\infty$.
- ii) Sabiendo que (1) tiene la solución particular $\mathbf{x}(t) = e^{2t}\ (\operatorname{sen} t, \cos t)^T$ resolver explícitamente el sistema.

5) Dado el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

escribir la solución general en la forma de Floquet. ¿Cuales son los multiplicadores y los exponentes característicos ?.

6) Se considera el sistema lineal con coeficientes periódicos

$$\mathbf{x}' = (1+\cos t) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{1}$$

- i) Calcular los multiplicadores asociados al sistema (1).
- ii) Determinar las matrices $\Omega(t)$ y Q de la descomposición de Floquet $\Phi(t) = \Omega(t)\exp(tQ)$, donde $\Phi(t)$ es matriz fundamental de (1), Q es constante y $\Omega(t)$ es $2\pi-$periódica.
- iii) Estudiar la existencia de soluciones periódicas.

7) Sea $\varphi(t)$ una función real continua y ω-periódica.

Probar que

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds$$

se puede expresar en la forma $\Phi(t) = \Psi(t) + \alpha t$, donde $\Psi(t)$ es ω-periódica y α es constante.

Aplicar el apartado anterior para dar una matriz fundamental del sistema lineal

$$\mathbf{x}' = \varphi(t)\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante y $\varphi(t)$ es continua y ω-periódica. Expresar dicha matriz fundamental en la forma de Floquet. ¿ Calcular los exponentes característicos?

---

8) Sea $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sistema no lineal autónomo que tiene la solución particular $\mathbf{x} = \varphi(t) \in C^2(J)$ con J intervalo de $\mathbb{R}$.

Probar que $\varphi'(t)$ verifica la ecuación variacional respecto a la solución $\varphi(t)$.

Suponiendo que $\varphi(t)$ es periódica de periodo τ. Probar que la ecuación variacional tiene al menos un multiplicador unidad.

---

9) Sea la ecuación

$$x'' + (x^2 + x'^2 - 1)x' + x = 0. \tag{1}$$

Sabiendo que tiene la solución periódica $x = \operatorname{sen} t$ escribir el sistema variacional correspondiente a esta solución periódica y calcular sus multiplicadores.

---

10) Hallar la solución general del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} 2t \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

y con la correspondiente matriz fundamental $\mathbf{X}(t)$, obtener una descomposición de la forma $\mathbf{X}(t) = \Omega(t)\exp(tQ)$ con Q constante y Ω periódica.

11) Las mismas cuestiones que en el ejercicio anterior para las sistemas de ecuaciones

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \operatorname{sen} t & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{1}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 + \cos t & 0 \\ \cos t & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{2}$$

---

12) Consideremos la ecuación de segundo orden

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \tag{1}$$

donde $a_1(t)$ y $a_2(t)$ son continuas en R y periódicas de periodo ω. Sean $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ soluciones de (1) tales que

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1'(0) = 0, \qquad \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2'(0) = 1$$

Escribir la ecuación de segundo orden (1) como sistema de primer orden y probar que los multiplicadores son las raíces de

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$$

donde

$$\alpha = \varphi_1(\omega) + \varphi_2'(\omega), \qquad \beta = \exp\left(-\int_0^\omega a_1(t)dt\right)$$

Se considera ahora $a_1 = 0$. Probar que si $|\alpha| < 2$ los multiplicadores son complejos conjugados de modulo 1 y todas las soluciones están uniformemente acotadas en R.

Con las mismas hipótesis de 2). Probar que si $|\alpha| > 2$ ninguna solución de la ecuación puede estar uniformemente acotada en toda la recta real.

---

13) Sea el sistema periódico bidimensional

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 t & \operatorname{sen} t \cos t + 1 \\ \operatorname{sen} t \cos t - 1 & \cos^2 t \end{pmatrix} \mathbf{y} \tag{1}$$

Sabiendo que $\mathbf{y}(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)^T$ es solución de (1), calcular una segunda solución independiente.

Escribir la matriz fundamental $\mathbf{Y}(t)$ obtenida con las dos soluciones anteriores en la forma de Floquet. Verificar que la matriz $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{Y}(\pi) = \mathbf{Y}(0)\mathbf{C}$, no se puede poner en la forma

$$\mathbf{C} = \exp(\pi\mathbf{Q}),$$

con $\mathbf{Q}$ real, pero en cambio $\mathbf{C}^2$ sí puede escribirse en la forma

$$\mathbf{C}^2 = \exp(2\pi\mathbf{Q}),$$

con $\mathbf{Q}$ real.

---

14) Sea el sistema lineal

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)x + \mathbf{b}(t), \tag{1}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathcal{C}(\mathrm{I\!R}, \mathrm{I\!R}^{m\times m})$, $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(\mathrm{I\!R}, \mathrm{I\!R}^m)$ y $\tau-$periódicas es decir

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+\tau), \qquad \mathbf{b}(t) = \mathbf{b}(t+\tau), \quad \forall t \in \mathrm{I\!R}$$

Sea $\Phi(t)$ matriz fundamental de (1) en $t = 0$.

Probar que (1) tiene una solución $\tau-$periódica si y solo si la aplicación $T : \mathrm{I\!R}^m \to \mathrm{I\!R}^m$

$$T(\mathbf{y}) = \Phi(\tau)\mathbf{y} + \eta \tag{2}$$

donde

$$\eta = \int_0^\tau \Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds$$

tiene un punto fijo.

Como consecuencia del apartado anterior, véase que si $\Phi(\tau)$ no tiene un valor propio unidad el sistema (1) tiene una solución $\tau-$periódica.

Sea el caso particular $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ constante y supongamos que dicha matriz no tiene autovalores imaginarios puros. Entonces $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ tiene una única solución periódica.

Sea $\xi(t) = \mathbf{x}(t; 0, \mathbf{y})$ solución de (1). Véase que para $k = 1,2\ldots$

$$\xi((k+1)\tau) = \Phi(\tau)\xi(k\tau) + \eta \tag{3}$$

y por tanto

$$\xi((k+1)\tau) = \Phi^{k+1}(\tau)\mathbf{y} + \sum_{j=0}^{k} \Phi^j(\tau)\eta \tag{4}$$

Véase que si existe $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\mathbf{z}^T \Phi(\tau) = \mathbf{z}^T, \qquad \mathbf{z}^T \eta \neq 0$$

la solución $\xi(t)$ es no acotada. Como consecuencia de este resultado probar que (1) tiene una solución periódica si y solo si tiene una solución uniformemente acotada.

2.4. Sistemas lineales matriciales

1) Probar que si B conmuta con A,

- B conmuta con $\exp(tA)$.
- $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$.
- $(A + B)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B + \binom{n}{2} A^{n-2} B^2 + \ldots + \binom{n}{n} B^n$.

---

2) Probar que la solución de

$$y'(t) = Ay(t), \qquad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^m$$

es $y(t) = \exp[(t - t_0)A]\, y_0$.

---

3) Sean a, b y c constantes reales no simultáneamente nulas.

i) Prueba que el polinomio mínimo de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

es $\lambda^3 + \mu^2 \lambda = 0$ donde $\mu^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

ii) Demuestra que

$$\exp[tA] = I + \frac{\operatorname{sen}(t\mu)}{\mu} A + \frac{(1-\cos(t\mu))}{\mu^2} A^2.$$

---

4) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -4 & 3 & 3 \\ 7 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Calcula $\exp(A)$ y A^{100}.

---

5) (Cálculo de $\exp(tA)$ por el método de Putzer) Sea $P(z) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\dots(z-\lambda_q)$ el polinomio mínimo de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ donde los valores propios λ_i están repetidos tantas veces como indica su multiplicidad en el polinomio mínimo y sean

$$P_0(z) = 1,\ P_1(z) = (z-\lambda_1),\ P_2(z) = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2), \dots$$

i) Prueba que $P_0(A), P_1(A), \dots P_{q-1}(A)$ son linealmente independientes en el conjunto de matrices reales $m \times m$.
ii) Teniendo en cuenta que $P(A) = P_q(A) = 0$ toda potencia A^k con $k \geq 0$ puede escribirse como combinación lineal de $P_0(A), \dots, P_{q-1}(A)$
iii) Por tanto, sustituyendo A^k,$k \geq 0$ en función de $P_0(A), P_1(A), \dots P_{q-1}(A)$ en el desarrollo de la exponencial $\exp(tA)$, se llega a una expresión de la forma

$$\exp[tA] = r_1(t)P_0(A) + r_2(t)P_1(A) + \dots + r_q(t)P_{q-1}(A),$$

con ciertas funciones reales $r_i(t)$.
iv) Teniendo en cuenta que

$$A\ P_j(A) = P_{j+1}(A) + \lambda_{j+1}P_j(A), \qquad j = 0, \dots, q-1$$

Demuestra que dichas funciones verifican

$$\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ \vdots \\ r_q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ \dots & \dots & 1 & \lambda_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_q \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} r_1(0) \\ r_2(0) \\ \vdots \\ r_q(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

v) Aplicaremos el método de Putzer al cálculo de $\exp(tA)$ donde A está dada por

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 21 & 18 \\ -15 & 29 & 18 \\ 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Primero calculamos el polinomio característico

$$p_{car}(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 8)^3$$

El polinomio mínimo es divisor del polinomio característico, por tanto será de la forma $P(z) = (z-8)^q$ con $q \leq 3$. Para decidir el valor de q miraremos la dimensión del ker $(A - 8I)$. Puesto que

$$A - 8I = \begin{pmatrix} -15 & 21 & 18 \\ -15 & 21 & 18 \\ 5 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

vemos que solo hay una fila independiente luego dim ker $(A - 8I) = 2$, lo que implica que hay dos vectores propios independientes y por tanto dos cajas de Jordan de tamaño 2 y 1. En consecuencia el polinomio mínimo es $P(z) = (z-8)^2$.

Con las notaciones anteriores

$$P_0(z) = 1, \qquad P_1(z) = z - 8$$

Las funciones $r_1(t)$ y $r_2(t)$ verifican

$$r_1' = 8r_1, \quad r_1(0) = 1 \qquad \Longrightarrow r_1(t) = e^{8t}.$$

$$r_2' = r_1 + 8r_2 = e^{8t} + 8r_2, \qquad r_2(0) = 0$$

La solución general de la ecuación anterior

$$r_2(t) = r_{2h}(t) + r_{2p}(t) = Ce^{8t} + te^{8t}$$

por la condición inicial $C = 0$, luego $r_2(t) = te^{8t}$

En definitiva

$$\exp[tA] = r_1(t)P_0(A) + r_2(t)P_1(A) = e^{8t}I + \left(te^{8t}\right)(A - 8I)$$

2.5. Métodos operacionales en ecuaciones lineales

1) Sea $L(z) = z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots a_1 z + a_0$ tal que $a_0 \neq 0$. Prueba (por inducción en el grado de $L(z)$) que para todo polinomio $p_n(t)$ de grado n, la ecuación lineal de coeficientes constantes

$$L(D)\,x(t) = p_n(t), \qquad (D = d/dt)$$

posee una única solución particular $x_p(t)$ polinómica del mismo grado n.

2) Sea $L(z) = z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_q z^q$ tal que $a_q \neq 0$. Prueba que para todo polinomio $p_n(t)$ de grado n, la ecuación lineal de coeficientes constantes

$$L(D)\,x(t) = p_n(t),$$

posee una única solución particular $x_p(t)$ de la forma $x_p(t) = t^q \pi_n(t)$ donde π_n es un polinomio de grado n.

3) Dada la ecuación lineal no homogénea

$$L(D)\,x \equiv (D^m + a_{m-1}D^{m-1} + \dots + a_0 I)\,x = f(t), \tag{2.1}$$

comprueba que si se aplica el método de variación de las constantes al sistema lineal equivalente a (2.1) se obtiene una solución particular de la forma

$$x_p(t) = u_1(t)\varphi_1(t) + \dots + u_m(t)\varphi_m(t),$$

donde $\langle \varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t) \rangle$ es una base de soluciones de $L(D)x = 0$ y las derivadas u_j' de las u_j son soluciones del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_m \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{m-1} & \varphi_2^{m-1} & \dots & \varphi_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Aplica el resultado anterior para calcular la solución general de

$$x'' + x = e^{\operatorname{sen} t}(1 + \cos^2 t - \operatorname{sen} t).$$

4) Calcula la solución general de las siguientes ecuaciones

1. $x'' + x' - 2x = e^{2t}\operatorname{sen}(2t)$
2. $x''' + 2x'' - x = e^{-t}\cos(2t)$
3. $x^{(4)} + 3x'' + 4x = -4e^t(3\cos(2t) + 5\operatorname{sen}(2t))$
4. $x^{(4)} + 5x'' + 4x = 2e^t(11 + 14t + 5t^2)$
5. $x^{(4)} + 2x'' + x = \cos t$.

Capítulo 3

EXISTENCIA, UNICIDAD Y PROLONGACIÓN DE SOLUCIONES

3.1. La condición de Lipschitz

1) Estudia la verificación de las condiciones de Lipschitz (local y global) de las siguientes funciones $f(t,x)$ respecto a la variable x en sus dominios naturales de definición:

- $$f(t,x) = |\operatorname{sen} x|, \qquad f(t,x) = \sqrt{|x|}$$
- $$f(t,x) = \frac{x}{1+t^2x^2}, \qquad f(t,x) = \frac{x^2}{1+x^2},$$
- $$f\left(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ -x_1 + \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2} - 1 \end{pmatrix}$$

---

2) Calcula la constante de Lipschitz de cada una de las funciones $f(t,x)$ respecto a la variable x en el conjunto D indicado:

- $f(t,x) = \text{sen}\,(tx), \qquad D = \{(t,x) \mid \quad |x| \le a, \quad |t| \le b\};$

- $f(t, x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 x_2, t + tx_2x_3, x_3^2)$, $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^4 \mid \ \|x\|_1 \leq 1, \ |t| \leq 2\}$;
- $f(t,x) = t \exp(-x/(1+|t|))$, $D = \{(t,x) \mid t \in \mathbb{R}, \ x \geq 0\}$;
- $f(t,x) = \exp(-t^2) \cdot x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}, \ x \neq 0, \ x \in [-1,1]\}$.

---

3) Se considera la ecuación diferencial escalar $x'(t) = f(t, x(t))$ donde la función f está definida por

$$f(t,x) = \begin{cases} t^2x^2\sqrt{\operatorname{sen} x}, & \text{si sen } x \geq 0; \\ 0, & \text{en otro caso .} \end{cases} \tag{3.1}$$

a) Estudiar la verificación de la condición de Lipschitz de f en $D = \{(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}\}$.

b) Probar que toda solución de (3.1) con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ está definida en $t \in [0, +\infty)$.

3.2. Existencia, unicidad y prolongación de soluciones

1) Considera el siguiente problema de valor inicial

$$ty'(t) = 2y(t), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Discute cómo deben ser las condiciones iniciales (t_0, y_0) para que el problema de valor inicial anterior:

a) no tenga solución,

b) tenga varias soluciones locales esencialmente distintas,

c) admita una única solución local.

---

2) Se considera la ecuación diferencial

$$x' = f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x}, & \text{si } x \neq 0; \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad y la verificación de la condición de Lipschitz de $f(t,x)$ en $(t,x) \in [0,\infty) \times [0,\pi]$ y en $(t,x) \in [0,\infty) \times [-\pi,\pi]$ respectivamente.

b) Dadas las condiciones iniciales $t_0 = 0$, $x_0 = \pi/2$, prueba que existe una única solución definida en $[0,\infty)$.

---

3) Se considera el problema de valor inicial de segundo orden

$$\begin{cases} x''(t) = f(t,x(t)), \\ x(0) = x_0, \qquad x'(0) = x'_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $f \in C([0,T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R})$ y acotada en su dominio de definición.

a) Probar que $x(t)$ es solución de (3.2) en $I = [0,T]$ si y sólo si verifica, para todo $t \in I$, la ecuación integral:

$$x(t) = x_0 + x'_0 t + \int_0^t (t-s) f(s,x(s)) ds.$$

b) Sea $E = \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ el espacio métrico con la métrica inducida por

$$\|u\|_B = \max_{t \in I} \left[e^{-Kt} |u(t)| \right],$$

donde K es constante positiva adecuada, que es un espacio completo. Se define $\Phi : E \to E$ tal que para todo $u \in E$, $(\Phi u)(t)$ está dado por

$$(\Phi u)(t) = x_0 + x'_0 t + \int_0^t (t-s) f(s,u(s)) ds.$$

Demuestra que si $f(t,x)$ verifica la condición de Lipschitz respecto a x en $D = [0,T] \times \mathbb{R}$, Φ es contractivo respecto a dicha norma y por tanto el problema (3.2) tiene una única solución definida en $I = [0,T]$.

---

4) Sea el PVI

$$x'(t) = |x(t) - t|, \qquad x(0) = x_0. \tag{3.3}$$

a) Probar que para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ existe una única solución de (3.3) definida en $[0, \infty)$.

b) Dar la forma explícita de la solución, según los valores de x_0.

---

5) Se considera la ecuación diferencial

$$x' = f(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1, \\ -t\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \leq 1 \ . \end{cases} \tag{3.4}$$

en el rectángulo $D = \{(t,x) | t \in [0,1], |x-1| \leq 2\}$.

a) Estudiar la continuidad y la condición de Lipschitz de $f(t,x)$ en D . Estudiar la existencia y unicidad de solución con las condiciones iniciales $(t_0, x_0) \in D$.

b) Encontrar todas las soluciones de (3.4) definidas en $t \in [0,1]$ y tales que $x(0) = 1$.

c) Lo mismo con $x(0) = x_0 \in (1,2)$.

---

6) Sea $f(t,y) \in C(D)$, $D = \{(t,y) \,|\, t \in [t_0, t_0+T], \|y - y_0\| \leq b\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$, y tal que respecto a un producto escalar $(\cdot,\cdot)$ de $\mathbb{R}^m$ se verifica

$$(f(t,y) - f(t,z), y - z) \leq \frac{1}{2(t-t_0)} \|y - z\|^2$$

para todo $(t,y), (t,z) \in D$ donde $| \cdot \|$ es la norma inducida por el producto escalar. Probar que en estas condiciones el problema de Cauchy

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0 \in \mathbf{R}^m,$$

tiene solución local única a la derecha de t_0.

---

7) Considérese la ecuación diferencial

$$y'(x) = f(x, y(x)) := \varphi(x)\sqrt{1 - \operatorname{sen} y(x)}\ ,$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, acotada y no trivialmente nula.

a) Estudiar la verificación de la condición de Lipschitz de f en su dominio natural de definición.

b) Discutir la existencia y unicidad de solución del PVI formado por la ecuación anterior con la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

c) ¿Son globales todas las soluciones ?

---

8) Probar que ninguna solución del sistema

$$x'(t) = y(t) + x(t)^2, \qquad y'(t) = x(t) + y(t)^2,$$

tal que $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$ puede estar definida en $[0, \infty)$.

---

9) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = -x - y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad y' = x - y + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

Probar que para condiciones iniciales $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ existe una única solución maximal a la derecha de $t_0 = 0$ definida en $[0, \infty)$.

---

10) Se considera el problema diferencial

$$x' = y + x(1 - x^2 - y^2), \qquad y' = -x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Probar que cualesquiera que, sean las condiciones iniciales, la solución correspondiente existe en $[0, \infty)$.

11) Probar que todas las soluciones de los siguientes sistemas

$$\begin{cases} x' = y\exp(-y^2) + 1 \\ y' = 1 + x\exp(-x^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \sqrt{1+y^2} \\ y' = \sqrt{1+x^2} \end{cases}$$

están definidas en $[0, \infty)$ cualesquiera que sean las condiciones iniciales.

---

12) Se considera el sistema

$$x' = \sqrt{x+y+1}, \qquad y' = \sqrt{x-y+1}.$$

- Probar que si $x(0) = y(0) = 0$, la solución correspondiente verifica $x(t) \geq y(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$ de su intervalo de definición.
- Estudiar si dicho intervalo maximal de definición puede ser toda la semirecta real positiva.

---

13) Se tiene el siguiente problema de valor inicial:

$$x' = x^2 + x - t(t-1), \qquad x(0) = x_0 > 0.$$

a) Demostrar que, si $x_0 \leq 1/2$, la solución maximal a derecha de (1) está definida en un intervalo $[0, t_1)$, con $t_1 \geq 1$.

b) Razonar si dicha solución maximal es global.

c) ¿Se puede garantizar el mismo resultado que en el primer apartado en el caso de que x_0 tome el valor 1?

---

14) Sea el problema de valor inicial

$$y'(t) = \sqrt{1 - y(t)}\ \operatorname{sen} y(t)\ , \qquad y(t_0) = y_0.$$

a) Determinar para qué puntos (t_0, y_0) del dominio $\mathbb{R} \times (-\infty, 1]$ se puede garantizar la existencia y unicidad de solución local.

b) Demostrar que, si $y_0 \in (0, 1)$, entonces $\exists t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $y(t_1) = 1$.

c) Calcular las soluciones constantes.

d) Deducir la existencia y unicidad de solución global para todo valor y_0 perteneciente a $(-\infty, 1)$.

e) Demostrar que toda solución no constante, o es estrictamente creciente, o es estrictamente decreciente.

---

15) Se considera el PVI

$$y'(t) = ty(t)\sqrt{|1 - y(t)^2|}\ , \qquad y(0) = y_0$$

a) Estudiar la verificación de la condición de Lipschitz.

b) Calcular las soluciones constantes.

c) Razonar si existe solución global, cuando $|y_0| < 1$. ¿Es única? Lo mismo para $|y_0| > 1$.

d) Sea ahora el problema

$$y'(t) = ty(t)\sqrt{|1 - y(t)^2|}\ , \qquad y(t_0) = y_0\ , t_0 \neq 0\ .$$

¿Hay unicidad de solución maximal para $y_0 = 1$? ¿Y para $y_0 = 0$?

---

16) Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{y}}{t+1}, \quad y' = \dfrac{\sqrt{x}}{t+1}, \quad \forall t \geq 0\ , \\ x(0) = x_0 \geq 0\ , \qquad y(0) = y_0 \geq 0\ . \end{cases}$$

a) Estudiar la existencia y unicidad de solución según los valores de (x_0, y_0).

b) Estudiar la globalidad de las soluciones.

c) En el caso en que $x_0, y_0 > 0$, calcular una integral primera. Demostrar que $\|(x(t), y(t))\|$ tiende a ∞, cuando $t \to +\infty$.

d) Demostrar que, si $x_0 = y_0 > 0$, entonces $x(t) = y(t)$, $\forall t \geq 0$. Hallar explícitamente la solución.

---

17) Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = \sqrt{y + x^2}, \qquad y' = \sqrt{x + y^2}$$

a) Estudiar el conjunto de puntos del espacio fásico (x, y) en los cuales se puede asegurar la existencia y unicidad de solución.

b) Dadas las condiciones iniciales $x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0$ ¿ Existe solución única definida en $[0, \infty)$?

c) Hallar la solución de del sistema anterior tal que $x(0) = y(0) = 1$.

---

18) Considera la ecuación diferencial escalar

$$y' = f(y) \equiv 2t\sqrt{|y^2 - 4|}$$

1) Estudia la verificación de la condición de Lipschitz de f en su dominio natural de definición.

2) Por separación de variables calcula las soluciones de la ecuación anterior en $\Omega_1 = \{(t, y); |y| \leq 2\}$ e indica su dominio de definición. Calcula explícitamente la solución tal que $y(0) = 0$ en su intervalo maximal de definición.

3) Calcula las soluciones en $\Omega_2 = \{(t, y); |y| > 2\}$. Determina explícitamente la solución tal que $y(0) = 3$ en su intervalo maximal de definición y haz el dibujo de la misma.

---

19) Considera la ecuación diferencial

$$y' = f(y) \equiv \sqrt{|y^2 - 1|}$$

1) Estudia la verificación de la condición de Lipschitz de f en su dominio natural de definición.

2) Para que valores de $(t_0, y_0) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ el PVI

$$y' = f(y), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{3.5}$$

tiene una única solución global.

3) Demuestra que para todo $y_0 \in \mathcal{R}$ las soluciones de (3.5) son globales a derecha de t_0 es decir están definidas en $[t_0, +\infty)$

4) Para $t_0 = 0, |y_0| \leq 1$ calcula explícitamente las soluciones de (3.5)

---

20) Considera el sistema autónomo 2-dimensional

$$\overrightarrow{y}' = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}) \equiv \begin{pmatrix} y_2/\sqrt{1-y_1} \\ y_1/\sqrt{1-y_2} \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{y} \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

1) Estudia la verificación de la condición de Lipschitz de $\overrightarrow{f}$ en su dominio de definición.

2) Prueba que si para ciertas funciones $\phi_1(t), \phi_2(t)$, $\overrightarrow{y}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))^T$ es solución de (3.6) también es solución $(\phi_2(t), \phi_1(t))^T$. Calcula la solución de (3.6) con las condiciones iniciales $\overrightarrow{y}(0) = (-3, -3)$, estudiando la localización de la órbita en el plano (y_1, y_2), monotonía e intervalo de definición.

3) Prueba que (3.6) posee una integral primera $F(y_1, y_2)$ de la forma $F(y_1, y_2) = g(y_1) - g(y_2)$. Calcula explícitamente la función g.

Capítulo 4

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA CUALITATIVA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1) Se considera el sistema autónomo bidimensional

$$\begin{cases} x' = y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

- Pasando a coordenadas polares comprobar que existe una única órbita periódica.
- Describir cualitativamente las órbitas en el espacio de fases.
- Sea S la región del plano (x, y) definida por

$$1/2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3/2 \quad , \quad 0 \leq \arctan(y/x) \leq \pi/6.$$

  Describir la imagen $S(2\pi)$ de S bajo la aplicación flujo.

---

2) Dado el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 2x_2, \\ x_2' = ax_1 + 2x_2. \end{cases}$$

- Determinar el valor de la constante a para que el origen sea nodo impropio estable.

- Para dicho valor de a probar que toda solución de

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 2x_2 - x_1^2, & x_1(0) = \varepsilon \\ x_2' = ax_1 + 2x_2 - x_2^2, & x_2(0) = \varepsilon, \end{cases}$$

  donde ε es un número positivo suficientemente pequeño, tiende hacia el origen del plano fásico (x_1, x_2) cuando $t \to +\infty$ con una determinada dirección límite. Calcular dicha dirección.

---

3) Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' = 4x^2y + 4y^3, \\ y' = -4y^2x - 4x^3. \end{cases}$$

Verificar que es un sistema hamiltoniano es decir que existe $H = H(x, y)$ tal que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Mediante la integral de la energía analizar las órbitas en el espacio de fases.

Comparar con las órbitas del espacio fásico del sistema

$$x' = y, \qquad y' = -x.$$

---

4) Se considera la ecuación de segundo orden

$$u'' + u + \beta u^3 = 0 \tag{1}$$

donde β es una constante real.

- Multiplicando por u' calcular una integral primera de (1) y probar que para $\beta \geq 0$ todas las órbitas del espacio fásico (u, u') son periódicas.

- Para $\beta < 0$, encontrar los puntos críticos y describir el comportamiento de los distintos tipos de órbitas en función de la constante de la integral primera.

5) Dibujar el espacio de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = x + y - x \operatorname{sen}(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y - y \operatorname{sen}(x^2 + y^2) \end{cases}$$

especificando los puntos críticos ,órbitas periódicas y conjuntos $\omega-$ y $\alpha-$ límites.

6) Sea el sistema autónomo bidimensional

$$x' = x(1 - x - y), \quad y' = y\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}x\right). \tag{1}$$

- Calcular los puntos críticos.
- Estudiar las ecuaciones linealizadas alrededor de estos.
- De acuerdo con el estudio del apartado anterior, conjeturar la fotografía del espacio fásico en la región $x \geq 0, y \geq 0$. Estudiar las órbitas situadas en el semieje $x > 0, y = 0$.

7) Considérese la ecuación de segundo orden

$$x'' + x^2 - \frac{x-6}{x-3} = 0. \tag{1}$$

- Calcular los puntos críticos y las ecuaciones linealizadas respecto a estos, indicando el tipo de puntos para los problemas lineal y no lineal.
- Obtener una integral primera de la ecuación dada y analizar la naturaleza de las órbitas alrededor de los puntos críticos en los casos no decididos en el apartado anterior.

8) Sea el sistema autónomo

$$x' = -x - \frac{x^3}{3} + 2\operatorname{sen} y, \qquad y' = -y + \frac{y^3}{4\pi^2}. \tag{1}$$

- Calcular los puntos críticos y dibujar el espacio de fases en un entorno de estos.
- Determinar un entorno del origen de la forma

$$W_{\beta,\varepsilon} = \{(x, y); x^2 + \beta y^2 \leq \varepsilon^2\}$$

con $\beta > 0$ y $\varepsilon > 0$ apropiados de manera que sea conjunto invariante del sistema (1).

---

9) Se considera el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = y\,[y^4 + (x^2-1)^2] + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = -x\,[y^4 + (x^2-1)^2] + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

- Calcular los puntos críticos y estudiar la aplicación del Teorema de linealización en estos.
- Probar que la circunferencia unidad: $x^2 + y^2 = 1$, está formada por dos puntos críticos y dos órbitas definidas en todo $\mathbb{R}$ y simétricas respecto al eje Ox.
- Estudiar la estructura de los conjuntos ω-límite de todas las órbitas del espacio fásico.

---

10) Consideremos un sistema autónomo bidimensional cuya función hamiltoniana es

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2(x-1)^2,$$

donde x representa la coordenada e y el momento conjugado del sistema de un grado de libertad.

- Escribir las ecuaciones diferenciales $x' = \partial H(x, y)/\partial y, y' = -\partial H(x, y)/\partial x$, asociadas al hamiltoniano anterior, determinando sus puntos críticos y estudiando el flujo alrededor de estos.
- Describir el comportamiento global del flujo en todo el plano (x, y) (órbitas periódicas, separatrices homoclínicas, etc).