

GUIA 2 ECUACIONES DIFERENCIALES

Problema 1.

Muestre que cualquier función $y(x)$ que satisface la relación $G(x, y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$ es una solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Problema 2.

Un cuerpo de masa 12 kg se mueve (en una dimensión) bajo la acción de una fuerza dependiente del tiempo $F(t) = 1 - 2t^2$. La posición inicial del cuerpo es $x(0) = 12 \text{ m}$ y su velocidad inicial $x'(0) = -3 \text{ m/s}$. Donde está el cuerpo después de 14 segundos?

Problema 3.

Encuentre las soluciones de la ecuación diferencial $y^{(4)}(x) + 2e^{-3x} = 0$ que cumplen la condición inicial $y'(0) = 3, 14$.

Problema 4.

Comprobar que la ecuación diferencial no lineal de primer orden $2xy' + y^2 = 1$ tiene una familia uniparamétrica de soluciones dada por $y(x) = \frac{Cx-1}{Cx+1}$. Sin embargo, para cualquier valor de x , la función constante $y(x) = 1$ es también una solución, que no puede obtenerse de la familia si se elige un valor particular del parámetro C .

Problema 5.

Calcula, por separación de variables, la solución general de las siguientes ecuaciones de primer orden. en caso de dar condiciones iniciales, determina las soluciones de los problemas de valor inicial y el intervalo maximal de definición.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{2 - 2y}, \quad y(-3) = 4, \quad y(-3) = -2.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(1) = 2.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x + 3xy^2}{yx^2 + 2y}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x^2 + x^2y^2}{y^2 + x^2y^2}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + xy^2}{4y}, \quad y(1) = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = -3y \cot(x), \quad y(\pi/2) = 2.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(x)}, \quad y(\pi/4) = \pi/4.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^3y^2 + x^3}.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x + xy^2}{2y + x^2y}, \quad y(2) = 1.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2 + 2y - 3)(x - 2)}{(x^2 + 2x - 3)(y - 2)}.$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin \theta + e^{2r} \sin \theta}{3e^r + e^r \cos \theta}, \quad r(\pi/2) = 0.$$

Problema 6.

La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2 - x^4}{4xy}$$

no es separable. Comprueba que la transformación $y \rightarrow v$ dada por $y = vx$ convierte la ecuación dada en otra de variables separables. Resuelve la nueva ecuación y calcula la solución general de la ecuación original.

Problema 7

Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y f(xy)}{x g(xy)}$$

no es separable. Comprueba que la transformación $y \rightarrow v$ dada por $y = v/x$ convierte la ecuación anterior en otra separable.

Aplica esta técnica para calcular la solución general de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2}{x + x^2y},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - xy + x^2y^2}{x^2 - x^3y}.$$