

## ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS, TAREA 5.

PROF: LUIS ARENAS

- (1) Demuestre que no se puede construir con regla y compás un polígono regular de 9 lados.
- (2) Demuestre que es posible construir con regla y compás el lado de un hipercubo de cuatro dimensiones cuyo hipervolumen sea el doble del de un hipercubo de lado dado. Por definición, el hipervolumen de un hipercubo de lado  $a$  es  $a^4$ .
- (3) Sea  $\eta = e^{\frac{2\pi i}{17}}$ . Encuentre elementos  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{Q}(\eta)$  tales que  $[\mathbb{Q}(u_i) : \mathbb{Q}] = i$ .
- (4) Si  $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{23}}$ , encuentre un entero  $d$  tal que  $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\lambda)$ .
- (5) Sea  $\wp(x) = x^p - x \in \mathbb{F}_p[x]$ , donde  $p$  es un número primo. Probar que
  - (a)  $\wp(a + b) = \wp(a) + \wp(b)$  para todo  $a, b \in \overline{\mathbb{F}_p}$ .
  - (b) Las raíces de  $\wp(x) = 0$  son los elementos de  $\mathbb{F}_p$ .
  - (c) Si  $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_p}$  es raíz de  $\wp(x) = a$ , las otras raíces son  $\alpha + i$  con  $i = 1, 2, \dots, p - 1$ .
  - (d) Todos los factores irreducibles de un polinomio de la forma  $\wp(x) - a \in \mathbb{F}_{p^n}[x]$  tienen el mismo grado.
  - (e) Un polinomio de la forma  $\wp(x) - a \in \mathbb{F}_{p^n}[x]$  es irreducible o un producto de factores lineales.

---

*Date:* Fecha de entrega: 10 de Diciembre de 2018.