Curso: Cálculo en Varias Variables (Pedagogía)
Profesor: Manuel Pinto
Ayudantes: Nelson Alvarado, Fabián Hidalgo

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Pseudo Prueba 2

Lunes 26 de Noviembre del 2018

I. 1. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcule las derivadas parciales de primer orden de f en todo punto **(1 punto)**. ¿Son continuas? **(0.5 puntos)**.

Solución: En $(x,y) \neq (0,0)$, calculamos las derivadas parciales usando las reglas de derivación:

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(y^2+x^2)^2}.$$

$$f_y(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - xy(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

En $(x,y) = (0,0)$, calculamos las derivadas parciales por definición:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Las derivadas parciales f_x, f_y no son continuas en $(0,0)$. En efecto, se tiene que

$$f_x(0,y) = \frac{1}{y} \quad \text{y} \quad f_y(x,0) = \frac{1}{x}$$

y al tomar $x, y \to 0$, vemos que los límites a través de estos caminos, no existen.

(b) Establezca que f no es diferenciable **(1.5 puntos)**.

Solución: La función f no es diferenciable en el punto $(0,0)$. Para probarlo, es suficiente probar que f no es continua en $(0,0)$ (recordando que diferenciable implica continua). En efecto, tomando los caminos $y = x$ e $y = -x$, se sigue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0), y=x} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0), y=-x} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Como los límites por caminos son distintos, se sigue que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, y por lo tanto f no es continua en $(0,0)$.

2. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $g(x, y, z) = (5x^2y^3 + 2z, \quad 6yz^2 - 11x^2z)$.

   (a) Calcule las derivadas parciales de primer orden de g **(1 punto)**.

   Solución: Un cálculo directo nos lleva a que para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$g_x(x,y,z) = \begin{bmatrix} 10xy^3 \\ -22xz \end{bmatrix}, \quad g_y(x,y,z) = \begin{bmatrix} 15x^2y^2 \\ 6z^2 \end{bmatrix}, \quad g_z(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 \\ 12yz - 11x^2 \end{bmatrix}$$

   (b) Deduzca que g es diferenciable **(1 punto)**.

   Solución: Dado que las derivadas parciales de g_x, g_y, g_z son continuas en todo punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se sigue, por teorema, que g es diferenciable en todo su dominio.

   (c) Calcule $g'(x, y, z)$ **(0.5 puntos)**.

   Solución: Por definición, se tiene que

$$g'(x,y,z) = \begin{bmatrix} g_x(x,y,z) & g_y(x,y,z) & g_z(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10xy^3 & 15x^2y^2 & 2 \\ -22xz & 6z^2 & 12yz - 11x^2 \end{bmatrix}$$

   (d) Calcule $D_g[1, 3, 5](x, y, z)$ **(0.5 puntos)**.

   Solución: Recordamos que la matriz jacobiana $g'(x_0, y_0, z_0)$ es la matriz representante de la diferencial $D_g[x_0, y_0, z_0]$. Luego, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$D_g[1,3,5](x,y,z) = g'(1,3,5) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270 & 135 & 2 \\ -110 & 150 & 169 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270x + 135y + 2z \\ -110x + 150y + 169z \end{bmatrix}$$

II. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ las funciones definidas por

$$f(u,v) = (u^2,\ uv^2,\ u-v) \qquad \text{y} \qquad g(x,y,z) = (z^2,\ x+1).$$

Encuentre:

1. $f'(u,v)$ y $g'(x,y,z)$ **(1.5 puntos)**.

   Solución:

   - Calculamos las derivadas parciales de f y su matriz jacobiana en todo punto (u,v):

     $$f_u(u,v) = \begin{bmatrix} 2u \\ v^2 \\ 1 \end{bmatrix}, f_v(u,v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2uv \\ -1 \end{bmatrix}$$

     Luego,

     $$f'(u,v) = \begin{bmatrix} f_u(u,v) & f_v(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u & 0 \\ v^2 & 2uv \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   - Ahora calculamos las derivadas parciales de g y su matriz jacobiana en todo punto (x,y,z):

     $$g_x(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, g_y(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, g_z(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2z \\ 0 \end{bmatrix}$$

     Luego,

     $$g'(x,y,z) = \begin{bmatrix} g_x(x,y,z) & g_y(x,y,z) & g_z(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. $(g \circ f)(u,v)$ y $(g \circ f)'(u,v)$ **(1.5 puntos)**.

   Solución: Dado $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ arbitrario, se tiene que

   $$\begin{aligned}(g \circ f)(u,v) &= g(f(u,v)) \\ &= g(u^2, \quad uv^2, \quad u-v) \\ &= ((u-v)^2, \quad u^2+1) \\ &= (u^2 - 2uv + v^2, \quad u^2+1)\end{aligned}$$

   Luego, las derivadas parciales de esta función son:

   $$(g \circ f)_u(u,v) = \begin{bmatrix} 2u - 2v \\ 2u \end{bmatrix}, (g \circ f)_v(u,v) = \begin{bmatrix} -2u + 2v \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Por lo tanto la matriz jacobiana de $(g \circ f)$ en (u,v) es

   $$(g \circ f)'(u,v) = \begin{bmatrix} (g \circ f)_u(u,v) & (g \circ f)_v(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u - 2v & -2u + 2v \\ 2u & 0 \end{bmatrix}$$

3. $g'(f(u,v))f'(u,v)$ **(1.5 puntos)**.

   Solución: Multiplicamos las matrices encontradas en la parte (1):

$$g'(f(u,v))f'(u,v) = g'(u^2, uv^2, u{-}v)f'(u,v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2(u-v) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2u & 0 \\ v^2 & 2uv \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u-2v & -2u+2v \\ 2u & 0w \end{bmatrix}$$

4. Compare los resultados de las partes (2) y (3) y explique **(1.5 puntos)**.

   Solución: Los resultados (2) y (3) son iguales, es decir,

$$(g \circ f)(u,v) = g'(f(u,v))f'(u,v), \qquad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \qquad (*)$$

   Esto ocurre porque la función f es diferenciable en (u,v) y la función g es diferenciable en el punto $f(u,v)$. Luego, por regla de la cadena se sigue que

$$D_{g\circ f}[(u,v)] = D_g[f(u,v)] \circ D_f[(u,v)]$$

   Reescribiendo esta última igualdad en términos de las matrices representantes de las diferenciales, se sigue la igualdad (*) es válida.

III. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = x^2y - e^{x^2+y^2}$ y sea $\hat{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ un vector unitario.

1. Encuentre la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,0)$ **(3 puntos)**.

   Solución: Calculamos las derivadas parciales de primer orden de f y el vector gradiente evaluado en $(1,0)$:

   $$f_x(x,y) = 2xy - 2xe^{x^2+y^2} \Rightarrow f_x(1,0) = -2e$$
   $$f_y(x,y) = x^2 - 2ye^{x^2+y^2} \Rightarrow f_y(1,0) = 1$$

   Con esto, se tiene que $\nabla f(1,0) = (f_x(1,0), f_y(1,0)) = (-2e, 1)$

   Finalmente, vemos que la ecuación del plano tangente está dada por

   $$\begin{aligned} z &= f(1,0) + \langle \nabla f(1,0), (x-1, y) \rangle \\ &= -e + \langle (-2e, 1), (x-1, y) \rangle \\ &= -e - 2e(x-1) + y \\ &= e - 2ex + y \end{aligned}$$

2. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{w}}(1,0)$ **(1 punto)**.

   Solución: $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{w}}(1,0) = \langle \nabla f(1,0), \hat{w} \rangle = \begin{bmatrix} -2e \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = -2ew_1 + w_2$

3. Deduzca que $\left| \dfrac{\partial f}{\partial \hat{w}}(1,0) \right| \leq \sqrt{4e^2+1}$ **(2 puntos)**

   Solución: El gradiente es la dirección de máximo incremento de la función f, lo que implica que

   $$\left| \frac{\partial f}{\partial \hat{w}}(1,0) \right| = \left| \Big\langle \nabla f(1,0), \hat{w} \Big\rangle \right| \leq ||\nabla f(1,0)|| \cdot ||\hat{w}|| = \left|\left| \nabla f(1,0) \right|\right| = \sqrt{4e^2+1}$$

IV. 1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pruebe que las derivadas parciales mixtas no son iguales en el origen **(3 puntos)**. ¿Contradice esto el teorema visto en clases que establece la igualdad de las derivadas parciales mixtas? **(3 puntos)**.

Solución:
En $(x,y) \neq (0,0)$, calculamos las derivadas parciales mediante las reglas usuales:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{3x^4y + 3x^2y^3 - x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^5 + x^3y^2 - 3x^3y^2 - 3xy^4 - 2x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}. \end{aligned}$$

(También se puede argumentar por simetría, notando que $f(x,y) = -f(y,x)$)

En $(x,y) = (0,0)$, calculamos las derivadas parciales por definición:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Luego, las derivadas parciales mixtas en el origen están dadas por

$$f_{xy}(0,0) = (f_y)_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^4}\frac{1}{h} = 1$$

$$f_{yx}(0,0) = (f_x)_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^5}{h^4}\frac{1}{h} = -1$$

El teorema visto en clases que establece la igualdad de las derivadas parciales mixtas en un punto requiere que f_x y f_y sean diferenciables en ese punto. Dado que no se tiene la igualdad, se puede deducir que a lo menos una de las funciones, f_x o f_y, no es diferenciable.

V. Obtenga el desarrollo de Taylor de segundo orden de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = -x\cos(2y)e^{-z}$ en $(0,0,0)$ **(3 puntos)**. Compare su resultado con los desarrollos de Taylor obtenidos usando los de las funciones de una variable

$$a(x) = -x, \quad b(y) = \cos(2y), \quad c(z) = e^{-z} \qquad \textbf{(3 puntos)}$$

Solución: Calculamos las derivadas parciales de primer orden de f, y la matriz jacobiana de f en $(0,0,0)$:

$$f_x(x,y,z) = -\cos(2y)e^{-z}, \quad f_y(x,y,z) = 2x\,\mathrm{sen}(2y)e^{-z}, \quad f_z(x,y,z) = x\cos(2y)e^{-z}$$

Con esto, se tiene que $f'(0,0,0) = \begin{bmatrix} f_x(0,0,0) & f_y(0,0,0) & f_z(0,0,0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Ahora calculamos las derivadas parciales de segundo orden de f y la matriz Hessiana de f. Teniendo en cuenta que f es de clase C^2, se tiene que

$$f_{xx}(x,y,z) = 0, \quad f_{yy}(x,y,z) = 4x\cos(2y)e^{-z}, \quad f_{zz} = -x\cos(2y)e^{-z}$$

$$f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = 2\,\mathrm{sen}(2y)e^{-z}$$

$$f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = \cos(2y)e^{-z}$$

$$f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z) = -2x\,\mathrm{sen}(2y)e^{-z}$$

Luego, la matriz Hessiana de f, evaluada en $(0,0,0)$, es

$$H_f(0,0,0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(0,0,0) & f_{yx}(0,0,0) & f_{zx}(0,0,0) \\ f_{xy}(0,0,0) & f_{yy}(0,0,0) & f_{zy}(0,0,0) \\ f_{xz}(0,0,0) & f_{yz}(0,0,0) & f_{zz}(0,0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, el desarrollo de Taylor de segundo orden de la función f en el punto $(0,0,0)$ es

$$T_f[0,0,0](x,y,z) = f(0,0,0) + f'(0,0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} H_f(0,0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= f(0,0,0) + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= -x + xz$$

Por otro lado, tomando los desarrollos de Taylor de una variable, se tiene que:

$$\begin{aligned} -x\cos(2y)e^{-z} &= -x(1 - \frac{(2y)^2}{2!} + \ldots)(1 + \frac{(-z)}{1!} + \frac{(-z)^2}{2!} + \ldots) \\ &= (-x + 2xy^2 + \ldots)(1 - z + z^2/2 + \ldots) \\ &= -x + zx - \frac{xz^2}{2} + \ldots + 2xy^2 - 2xy^2 z + \ldots \\ &= -x + xz + \ldots \end{aligned}$$

De donde se concluye que los desarrollos de Taylor de segundo orden coinciden.

VI. Encuentre **(2 puntos)** y clasifique **(4 puntos)** los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$$

Solución: Calculamos las derivadas parciales de primer orden y el vector gradiente:

$f_x(x,y,z) = 4x(x^2+y^2-1), \quad f_y(x,y,z) = 4y(x^2+y^2-1)$

Luego, nuestro vector gradiente en todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x(x^2+y^2-1) \\ 4y(x^2+y^2-1) \end{bmatrix}$$

Calculamos las derivadas parciales de segundo orden y la matriz Hessiana. Notando que f es de clase C^2, se tiene que:

$f_{xx}(x,y,z) = 12x^2+4y^2-4, \quad f_{yy}(x,y,z) = 4x^2+12y^2-4, \quad f_{xy}(x,y,z) = 8xy$

Luego, nuestra matriz Hessiana en todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{yx}(x,y,z) \\ f_{xy}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2+4y^2-4 & 8xy \\ 8xy & 4x^2+12y^2-4 \end{bmatrix}$$

Ahora buscamos los puntos críticos de la función f, resolviendo el sistema $\nabla f(x,y) = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} 4x(x^2+y^2-1) &= 0 \\ 4y(x^2+y^2-1) &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación, se obtiene que $x = 0$ o $x^2+y^2 = 1$, y de la segunda ecuación se obtiene que $y = 0$ o $x^2+y^2 = 1$. Distinguimos casos:

- Si $x = y = 0$, entonces $(0,0)$ es un punto crítico de la función. Evaluamos la matriz Hessiana en este punto: $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ y vemos que un valor propio múltiple $\lambda = -4$. Como todos los valores propios son negativos, se sigue que la función alcanza un máximo local en este punto.

- Si $x = 0$ y $x^2+y^2 = 1$, entonces $y = \pm 1$. Con esto, se obtienen los puntos críticos $(0,\pm 1)$. Análogamente, si $y = 0$ y $x^2+y^2 = 1$, entonces se obtienen los puntos críticos $(\pm 1, 0)$ Evaluamos la matriz Hessiana en estos puntos:

  $H_f(0,\pm 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ y $H_f(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

  Los valores propios de ambas matrices son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 8$. Para este caso no se puede aplicar el criterio de la segunda derivada. Sin embargo, notemos que la función es no-negativa y además satisface $f(0,1) = f(1,0) = 0$, lo que implica que la función alcanza mínimos globales en estos puntos.

- Si $x, y \neq 0$ y $x^2+y^2 = 1$, entonces

  $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 8x^2 & 8xy \\ 8xy & 8y^2 \end{bmatrix}$ y esta matriz tiene valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 8x^2+8y^2 > 0$. Luego, tampoco podemos aplicar el criterio de la segunda derivada para estos puntos. Sin embargo, un razonamiento análogo al del caso anterior nos permite concluir que la función alcanza mínimos globales en estos puntos.

VII. Halle tres números positivos cuya suma sea 30 y cuyo producto sea lo más grande posible **(6 puntos)**.

Solución: La función a maximizar es $f(x, y, z) = xyz$, con $x, y, z > 0$. Sabemos que $x+y+z = 30$, lo que implica que $z = 30 - x - y$. Con esto, la función f se puede reescribir como

$$f(x, y) = xy(30 - x - y) = 30xy - x^2y - xy^2$$

Calculamos las primeras derivadas parciales y el vector gradiente de f:

$$f_x(x, y) = 30y - 2xy - y^2 = y(30 - 2x - y), \quad f_y(x, y) = 30x - x^2 - 2xy = x(30 - x - 2y)$$

Con esto, nuestro vector gradiente es $\nabla f(x, y) = (30y - 2xy - y^2, \quad 30x - x^2 - 2xy)$

Buscamos los puntos críticos de la función f resolviendo $\nabla f = \vec{0}$, lo que nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y(30 - 2x - y) &= 0 \\ x(30 - x - 2y) &= 0 \end{aligned}$$

Dado que $x, y > 0$, podemos simplificar el sistema anterior, obteniendo el sistema lineal de 2x2

$$\begin{aligned} 2x + y &= 30 \\ x + 2y &= 30 \end{aligned}$$

cuya solución única es $x = 10, y = 10$. Esto nos lleva a que $z = 30 - 10 - 10 = 10$, es decir, $(x, y, z) = (10, 10, 10)$. Ahora verificamos que efectivamente se trata de un máximo.

Calculamos las segundas derivadas parciales y la matriz Hessiana de f (notando que f es de clase C^2 al tratarse de un polinomio):

$$f_{xx}(x, y) = -2y, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 30 - 2x - 2y, \quad f_{yy}(x, y) = -2x$$

Entonces $H_f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{yx}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y & 30 - 2x - 2y \\ 30 - 2x - 2y & -2x \end{bmatrix}$

Evaluamos la matriz Hessiana en el único punto crítico encontrado:

$$A = H_f(10, 10) = \begin{bmatrix} -20 & -10 \\ -10 & -20 \end{bmatrix}$$

Para determinar la naturaleza de este punto crítico, usaremos el criterio de los valores propios:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{bmatrix} -20 - \lambda & -10 \\ -10 & -20 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (-20 - \lambda)^2 - (-10)^2 \\ &= 400 + 40\lambda + \lambda^2 - 100 \\ &= \lambda^2 + 40\lambda + 300 \\ &= (\lambda + 30)(\lambda + 10) \end{aligned}$$

Es decir, los valores propios de $H_f(0, 0)$ son $\lambda_1 = -30$ y $\lambda_2 = -10$. Como ambos son negativos, por criterio se concluye que f alcanza un máximo local en $(0, 0)$. Este máximo será global, puesto que la función f es derivable en todo punto.

Finalmente, vemos que el producto más grande es $f(10, 10, 10) = 10^3 = 1000$.