Curso: Cálculo en Varias Variables (Pedagogía)
Profesor: Manuel Pinto
Ayudantes: Nelson Alvarado, Fabián Hidalgo

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Prueba 1

Viernes 9 de Noviembre del 2018

Conteste las preguntas 1 y 2, y solo una entre las preguntas 3 y 4.

1. Sean $B(0,r)$ y $B[0,r]$ bolas en $\mathbb{R}^n$ abierta y cerrada respectivamente.

   a) Demuestre que si A es un conjunto finito, entonces $B(0,r) - A$ es abierto **(2 puntos)**. ¿Qué pasa si A es infinito? **(1 punto)**

   b) Demuestre que $B(0,r)$ tiene un cubrimiento por abiertos que NO admite un subcubrimiento finito **(1.5 puntos)**. Extienda ese cubrimiento a $B[0,r]$ y establezca que $B[0,r]$ posee un subcubrimiento finito de aquél. **(1.5 puntos)**

2. a) Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \cos\left(\dfrac{x^4-y^4}{x+y}\right)$ **(0.8 puntos)** y demuestre su afirmación **(1.2 puntos)**.

   b) Demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} xy = 2$ **(2 puntos)**

   c) Decida la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{(y-1)\sqrt{|x|}}{y^2-2y+1+|x|}$ **(2 puntos)**

3. a) Sean $x, a \in \mathbb{R}^n$ y $f(x) = \langle x, a\rangle$ (producto interno entre x y a). Demuestre que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz **(2 puntos)** y uniformemente continua **(2 puntos)**.

   b) Establezca que el siguiente conjunto es compacto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\pi}{4} \leq \arctan(x^2+y^2+z^2-1) \leq \frac{\pi}{3}\}$$ **(2 puntos)**

4. Para $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y,z) = a|x| + b|y| + c|z|$$

   Demuestre que f es una función de Lipschitz **(2.5 puntos)** y uniformemente continua **(1.5 puntos)** y deduzca que el conjunto

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3|x| + 2|y| + 5|z| \leq 2018\} \text{ es compacto.}$$ **(2 puntos)**