Departamento de Matemáticas.

ALGEBRA Y GEOMETRIA 1 (PRIMAVERA 2018)

CORRECION CONTROL 7

1.-Encuentre el valo para k tal que $x-3$ divida a $x^3-kx^2+2kx-12$.

Respuesta:

Que $x-3$ divida a $x^3-kx^2+2kx-12$ es equivalente a que 3 sea raiz de $x^3-kx^2+2kx-12$ por lo que al evaluarlo en 3 se anula, asi obtenemos la siguiente ecuacion $27-9k+6k-12=0$ por lo que $k=5$.

2.-Sea $p(x)=\sum a_j x^j \in \mathbb{Z}[x]$, sea $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ con $\beta \neq 0$ asuma que $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ es raiz de $p(x)$. Demuestre que $\alpha | a_0$ y $\beta | a_n$.

Dem:

Como $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ podemos tomar $(\alpha,\beta)=1$; ahora recordemos que si $(a,b)=1$ y $a|bc$ entonces $a|c$ y como corolario de esto si $a|b^n c$ entonces $a|c$. Teniendo en cuenta esto si $\frac{\alpha}{\beta}$ es raiz de $p(x)$ entonces $p(\frac{\alpha}{\beta})=0$ es decir:

$$a_0 + a_1\frac{\alpha}{\beta} + \cdots + a_{n-1}(\frac{\alpha}{\beta})^{n-1} + a_n(\frac{\alpha}{\beta})^n = 0$$

.

amplificando por β^n obtenemos la siguiente ecuacion en $\mathbb{Z}$:

$$a_0\beta^n + a_1\alpha\beta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta + a_n\alpha^n = 0$$

asiendo un pequeños ajuste a la ecuacion obtenemos que:

$$\beta(-1)(a_0\beta^{n-1} + a_1\alpha\beta^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1}) = a_n\alpha^n$$

es decir $\beta | a_n\alpha^n$ entonces por el corolario $\beta | a_n$. Para α solo basta ajustar la ecuacion de la siguiente manera:

$$a_0\beta^n = \alpha(-1)(a_1\beta^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-2}\beta + a_n\alpha^{n-1})$$