

**Profesor:** Mario I. Molina

**Ayudante:** Iván Gallo M.

## Física contemporánea I: Guía para la (mini) prueba #1

1. Quince partículas idénticas tienen diversas velocidades: una tiene una velocidad de 2.0 m/s, dos tienen velocidades de 3.0 m/s; tres tienen velocidades de 5.0 m/s; cuatro tienen velocidades de 7.0 m/s; tres tienen velocidades de 9.0 m/s y dos tienen velocidades de 12.0 m/s. Encuentre la velocidad promedio  $\langle V \rangle$ , la velocidad cuadrática media  $\sqrt{\langle V^2 \rangle}$ , y la velocidad más probable de estas partículas.
2. Para un gas ideal:
  - (a) Obtener la energía de traslación molecular media a partir de la distribución de Maxwell expresada como distribución de energías.
  - (b) Calcular la fracción de moléculas de un gas que tienen un valor de  $v_x^2$  mayor que la velocidad cuadrática media  $\langle v_x^2 \rangle$ . Demuestre que esta fracción es independiente de la temperatura de los gases.
3. A partir de la función de distribución de velocidades, deduzca la función de distribución de energías.
4. Considere la función  $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  para  $-1 < x < 1$ , y cero afuera. Puede esta función llegar a ser una densidad de probabilidad? Justifique. Si lo es, calcule  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ .
5. Suponga un recipiente cerrado de moléculas idénticas de masa  $m$  y velocidad  $v$  que ejercen una presión  $p$  sobre las paredes del recipiente. Si reemplazamos la mitad de ellas por moléculas de masa  $m/2$  y velocidad  $2v$ , cómo varía la presión?
6. Considere un gas ideal de moléculas de  $N_2$  (Nitrogeno), sobre la superficie de la Tierra, y a temperatura ambiente. A esta temperatura, que fracción de las moléculas posee energía suficiente para escapar de la gravedad terrestre?
7. Calcule la altura promedio a que se halla una molécula de oxígeno  $O_2$  en la atmósfera terrestre, suponiendo una temperatura de  $10^\circ C$ .
8. Considere las partículas dentro de una centrífuga de gases, un aparato usado para separar partículas de masa diferente, haciéndolas girar en una trayectoria circular de radio  $r$  a una velocidad angular  $\omega$ . La fuerza sobre una partícula dada actúa hacia el centro de la órbita circular, y tiene una magnitud de  $m\omega^2 r$ . Demuestre que la densidad radial de partículas obedece

$$n(r) = n(0) \exp(m\omega^2 r^2 / 2K_B T)$$

9. Considere un oscilador armónico simple de frecuencia  $\omega$  y amplitud máxima  $x_0$ .
- Halle la función densidad de probabilidad para el oscilador, es decir, la probabilidad de que el oscilador sea hallado en el intervalo entre  $x$  y  $x + dx$ , como función de  $x$ .
  - Grafíquela en todo el rango permitido, y muestre que está normalizada a uno.
  - Evalúe  $\langle x \rangle$ ,  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  y la posición más probable.
  - Cuál es la probabilidad de hallar el oscilador entre  $x = 0$  y  $x = x_0/2$ ? Compárela con la probabilidad de hallarlo entre  $x = x_0/2$  y  $x = x_0$ . Cuál es mayor?
10. Considere un recipiente 1D conteniendo un gas de partículas no interactuantes. Suponga que la densidad de probabilidad de hallar una partícula en posición  $x$  entre las paredes  $x = 0$  y  $x = L$  es proporcional a  $\sin(\pi x/L)^2$ . Encuentre la distribución normalizada para la posición de las partículas, y halle la posición promedio  $\langle x \rangle$ .
11. Considere una función de distribución de rapidez dada por  $f(v) = A v \exp(-Bv)$ , donde  $B \equiv \sqrt{m/K_B T}$  y  $0 < v < \infty$ .
- determine  $A$  de modo que  $f(v)$  esté normalizada.
  - Calcule  $\langle v \rangle$ ,  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ , y la velocidad más probable.
  - Qué porcentaje de las partículas posee rapidez mayor que  $2\langle v \rangle$  ?
12. Considere un oscilador **NO** armónico de masa  $m$  y constante de resorte  $k$ , donde el potencial tiene la forma  $U(x) = (1/2)k|x|$ . Sea  $x_0$  la amplitud máxima del oscilador:
- Halle la función distribución (normalizada) para este oscilador, es decir, la probabilidad de que el oscilador sea hallado entre  $x$  y  $x + dx$ , como función de  $x$ .
  - Calcule  $\langle x^2 \rangle$ .
  - Calcule la probabilidad de hallar el oscilador en el intervalo  $(x_0/2) < x < x_0$ .
13. Deduzca la distribución de Maxwell-Boltzmann para un gas ideal bidimensional. Calcule la velocidad media  $\langle v \rangle$ , la velocidad más probable  $v_{mp}$  y  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ , como funciones de la temperatura.
14. Dada la distribución de Maxwell-Boltzmann, evalúe  $\langle 1/v \rangle$ ,  $\langle 1/v^2 \rangle$ ,  $\langle v \rangle$ ,  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$  y la rapidez más probable  $v_p$ .
15. La luz emitida por las moléculas de un gas caliente experimentan un corrimiento Doppler debido a la agitación térmica que hace que unas moléculas se muevan hacia el observador, y otras se alejan del observador. Estime el corrimiento Doppler  $\Delta f/f_0$ , asumiendo que la frecuencia en reposo es  $f_0$ , para átomos de hierro a una temperatura de 6000 K, y donde la velocidad media es

$$\langle v \rangle = \pm \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (1)$$

Lleve a cabo las aproximaciones que sean razonables al usar la formula para el corrimiento de las frecuencias:

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 \pm v/c}}{\sqrt{1 \mp v/c}}. \quad (2)$$

16. Considere un gas de fotones en equilibrio dentro de una caja cubica de volumen  $a^3$ . Calcule el numero de modos normales permitidos de frecuencia  $\omega$  en el intervalo  $d\omega$ .
17. En muchos casos de interés la energía total de una partícula puede escribirse de la forma  $E = \sum_{j=1}^n c_j q_j^2$ , donde los  $c_j$  son constantes y los  $q_j$  son coordenadas de posición o momento. En tal caso, la distribución de Maxwell-Boltzmann tiene la forma  $F_{MB} = A \exp(-\sum c_j q_j^2/kT)$ . Encuentre el valor de la constante  $A$ . Luego, como aplicación de este resultado demuestre que la energía promedio por partícula es igual a  $(1/2)kT \times n$ . Este resultado se conoce como el *Teorema de equipartición de la energía*.
18. Suponga una nave espacial en 2D donde la presión interna es  $P_0$  inicialmente. Si en cierto instante se produce una pequeña rotura en el casco de la nave (debida a un micrometeorito), halle el comportamiento de la presión como función del tiempo.
19. A partir de la distribución de velocidades Maxwell-Boltzmann, halle la distribución de energías  $G(E)$  donde  $G(E)dE$  es la fracción de moléculas con energía cinética en el intervalo  $[E, E + dE]$ .
20. Un sistema posee niveles de energía no-degenerados con energía  $E = (n + 1/2)\hbar\omega$ , donde  $\hbar\omega = 8.625 \times 10^{-5} \text{ eV}$ , y  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Calcule la probabilidad de que el sistema este en el estado  $n = 10$  si esta en contacto con un baño térmico a temperatura ambiente ( $T = 300\text{K}$ ). Cual será la probabilidad en los casos límites de temperatura muy bajas y muy altas?