Guía 6

Ejercicio 1. (Grupo de Weyl) Sean G un grupo lineal conexo, T un toro maximal y W el grupo de Weyl correspondiente. Sea P' el conjunto de pesos α tales que G_α no es soluble. Denotamos $V := X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$

1. Sean $\alpha \in P'$ y $w \in W$. Pruebe que $s_{w(\alpha)} = w s_\alpha w^{-1}$.
2. Pruebe que si $w \in W$ fija a $x \in V$ entonces es un producto de reflexiones s_α con $\alpha \in P'$ que fijan a x.
3. Pruebe que todo elemento de W es un producto de a lo más $\dim T$ reflexiones s_α con $\alpha \in P'$.

Ejercicio 2. (Grupos semisimples de rango 1)

1. Sea Gun grupo lineal conexo semisimple de rango 1. Pruebe que G no tiene subgrupos normales propios de dimensión ≥ 1. Deduzca que $[G, G] = G$.
2. Sea r una representación no trivial de SL_2. Pruebe que $\mathrm{Im}(r)$ es isomorfo a SL_2 o a PSL_2.
3. Pruebe que todo grupo lineal conexo de dimensión 2 es soluble.

Ejercicio 3. (SL_2) En este ejercicio, $G = \mathrm{SL}_2$, B corresponde a las matrices triangulares superiores, T a las matrices diagonales, $\alpha^\vee(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$ para $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ y $\alpha \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = x^2$.

1. *a*) Sea $\chi \in X = X^*(T)$ dado por $\chi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} = x^a$ con $a \geq 0$. Sea
$$V_a := \{f \in k[G] \mid f(gb) = \chi(b) f(g),\ \forall\, g \in G,\, b \in B\},$$
donde $\chi(b)$ se obtiene componiendo con $B \to B/B_u \simeq T$. Pruebe que V_a es un subespacio λ-invariante de $k[G]$ de dimensión $a+1$.
   b) Sea ρ_a la representación racional de G en V_a vía λ. Pruebe que existe una base $(e_0, \ldots, e_a)$ de V_a tal que
$$\rho_a \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} e_i = x^{a-2i} e_i,\ x \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \qquad \rho_a \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e_i = \sum_{j=0}^{a} (-1)^{i+j} (i,j) x^{i-j} e_j,\ x \in \mathbb{G}_{\mathrm{a}},$$
donde (i, j) representa un coeficiente binomial.
   c) Pruebe que ρ_a es irreducible.
2. Sea $r : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación racional de dimensión finita y sea $r^\vee : G \to \mathrm{GL}(V^\vee)$ la representación dual.
   a) Pruebe que existe $\chi \in X$ y $v \in V$ no nulo tal que $r(b)v = \chi(b)v$ para $b \in B$. Pruebe que entonces $\langle \chi, \alpha^\vee \rangle \geq 0$.
   b) Pruebe que si r es irreducible, entonces la aplicación lineal $\phi : V^\vee \to k[G]$ dada por $\phi(u)(g) = u(r(g)v)$ es inyectiva.
   c) Pruebe que toda representación racional irreducible de G es isomorfa a un único ρ_a.
3. *a*) Pruebe que existe una base $(f_0, \ldots, f_a)$ de $V_a^\vee$ tal que
$$\rho_a^\vee \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} f_i = x^{-a+2i} f_i,\ x \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \qquad \rho_a \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_0 = \sum_{i=0}^{a} x^i f_i,\ x \in \mathbb{G}_{\mathrm{a}}.$$

Pruebe que si (f_i') es otra tal base, entonces existe $a \in k^*$ tal que $f_i' = af_i$ para todo i.

b) Sea $r : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación racional de dimensión $a+1$ y supongamos que existe $v \in V$ no nulo con

$$\rho \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} v = x^a v, \quad x \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}},\, y \in \mathbb{G}_{\mathrm{a}},$$

y tal que los $(\rho(g)-1)v$ para $g \in G$ generan V. Pruebe que ρ es isomorfa a $\rho_a^\vee$. *Hint: use la aplicación ϕ de más arriba.*

Ejercicio 4. (Dátums radicales)

1. Sea $\Psi = (X, R, X^\vee, R^\vee)$ un dátum radical. Consideremos el morfismo $f : X \to X^\vee$ dado por $f(x) = \sum_{\alpha \in R} \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha^\vee$.
   a) Pruebe que para $\alpha \in R$ tenemos $f(\alpha) = \frac{1}{2}\langle \alpha, f(\alpha)\rangle \alpha^\vee$ y que
   $$\ker(f) = \{x \in X \mid \langle x, \alpha^\vee \rangle = 0,\, \forall\, \alpha \in R\}.$$
   b) Sea Q el subgrupo de X generado por R. Pruebe que $Q \cap \ker(f) = \{0\}$ y que $Q + \ker(f)$ tiene índice finito en X.
   c) Pruebe que $W(\Psi)$ es finito.
2. Sea $G = \mathrm{GL}_n$ y sea $T = D_n$.
   a) Consideremos los caracteres α_{ij} de T dados por $\alpha_{ij}(\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n)) = x_i x_j^{-1}$ para $1 \le i, j \le n$ e $i \ne j$. Pruebe que α_{ij} es una raíz de (G, T).
   b) Pruebe que $\mathfrak{g}$ es la suma directa de $\mathfrak{t}$ y de los $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$. Pruebe que G es reductivo.
   c) Pruebe que el dátum radical $\Psi(G, T)$ es isomorfo a $(X, R, X^\vee, R^\vee)$ con
      - $X = X^\vee = \mathbb{Z}^n$ (con el apareamiento obvio);
      - $R = R^\vee = \{e_i - e_j \mid i \ne j\}$, donde les e_i son la base canónica de $\mathbb{Z}^n$.
   d) Sea $G_1 = \mathrm{SL}_n$ y sea $T_1 = D_n \cap \mathrm{SL}_n$. Pruebe que el dátum radical $\Psi(G_1, T_1)$ es isomorfo a $(X_1, R_1, X_1^\vee, R_1^\vee)$ con
      - $X_1 = X/\mathbb{Z}(e_1 + \cdots + e_n)$ y $X_1^\vee = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^\vee \mid \sum_i x_i = 0\}$ (con el apareamiento inducido por $X \times X^\vee$);
      - $R_1 = \pi(R)$ para $\pi : X \to X_1$ la proyección y $R_1^\vee = R^\vee$.
   e) Sea $Z \subset G$ el subgrupo de matrices escalares (i.e. las homotecias). Sea $G_2 = G/Z$ y $T_2 = T/Z$. Pruebe que el dátum radical $\Psi(G_2, T_2)$ es isomorfo al dual $(X_1^\vee, R_1^\vee, X_1, R_1)$ del dátum de la pregunta anterior.
3. Sea $V = k^{2n+1}$ y sea Q la forma cuadrática sobre V dada por
   $$Q(x_0, \dots, x_{2n}) = x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i x_{n+i}.$$
   Consideremos la forma bilineal dada por $(v, w) := Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$. Sea G la componente neutra del grupo de los $g \in \mathrm{GL}(V)$ tales que $Q(gv) = Q(v)$ para todo $v \in V$.
   a) Pruebe que G es isomorfo a SO_{2n+1}.
   b) Pruebe que $\mathfrak{g} = \{\phi \in \mathrm{End}(V) \mid (\phi v, w) + (v, \phi w) = 0,\, \forall\, v, w \in V\}$. *Hint: Pruebe primero que $\mathfrak{g}$ está contenido en este conjunto y luego argumente por dimensión.*
   c) Pruebe que el subgrupo de G de los elementos de la forma
   $$(x_0, \dots, x_{2n}) \mapsto (x_0, t_1 x_1, \dots, t_n x_n, t_1^{-1} x_{n+1}, \dots, t_n^{-1} x_{2n}),$$
   con $t_i \in k^*$ es un toro maximal de G. Pruebe que las aplicaciones
   $$(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_i^\epsilon \quad \text{y} \quad (t_1, \dots, t_n) \mapsto t_i^\epsilon t_j^\eta,$$
   con $i \ne j$ y $\epsilon, \eta \in \{\pm 1\}$, son raíces de (G, T).

d) Pruebe que $\mathfrak{g}$ es la suma directa de $\mathfrak{t}$ y de los $\mathfrak{g}_\alpha$ para α como en la pregunta anterior. Pruebe que G es semisimple.

e) Pruebe que el dátum radical $\Psi(G,T)$ es isomorfo a $(X, R, X^\vee, R^\vee)$ con
- $X = X^\vee = \mathbb{Z}^n$ (con el apareamiento obvio);
- $R = \{\pm e_i,\ \pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\}$ y $R^\vee = \{\pm 2e_i,\ \pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\}$, donde les e_i son la base canónica de $\mathbb{Z}^n$.

4. Sea $V = k^{2n}$ y sea Q la forma cuadrática sobre V dada por

$$Q(x_1, \ldots, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+i}.$$

Consideremos la forma bilineal $(\cdot,\cdot)$ y el grupo G definidos análogamente a la pregunta anterior.

a) Pruebe que G es semisimple e isomorfo a SO_{2n}.

b) Pruebe que el subgrupo de G de los elementos de la forma

$$(x_1, \ldots, x_{2n}) \mapsto (t_1 x_1, \ldots, t_n x_n, t_1^{-1} x_{n+1}, \ldots, t_n^{-1} x_{2n}),$$

con $t_i \in k^*$ es un toro maximal de G. Pruebe que las aplicaciones

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto t_i^\epsilon t_j^\eta,$$

con $i \neq j$ y $\epsilon, \eta \in \{\pm 1\}$, son raíces de (G,T).

c) Pruebe que el dátum radical $\Psi(G,T)$ es isomorfo a $(X, R, X^\vee, R^\vee)$ con
- $X = X^\vee = \mathbb{Z}^n$ (con el apareamiento obvio);
- $R = R^\vee = \{\ \pm e_i \pm e_j \mid i \neq j\}$, donde les e_i son la base canónica de $\mathbb{Z}^n$.

5. Sea $V = k^{2n}$ y sea $(\cdot,\cdot)$ la forma bilineal alternante sobre V dada por

$$(x_1, \ldots, x_{2n}, (y_1, \ldots, y_{2n})) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i).$$

Sea G el grupo de los $g \in \mathrm{GL}(V)$ tales que $(gv, gw) = (v, w)$ para todo $v, w \in V$.

a) Pruebe que G es conexo, semisimple e isomorfo a SO_{2n}.

b) Pruebe que el subgrupo de G de los elementos de la forma

$$(x_1, \ldots, x_{2n}) \mapsto (t_1 x_1, \ldots, t_n x_n, t_1^{-1} x_{n+1}, \ldots, t_n^{-1} x_{2n}),$$

con $t_i \in k^*$ es un toro maximal de G. Pruebe que las aplicaciones

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto t_i^\epsilon t_j^\eta,$$

con $i \neq j$ y $\epsilon, \eta \in \{\pm 1\}$, son raíces de (G,T).

c) Pruebe que el dátum radical $\Psi(G,T)$ es isomorfo al dátum dual del de SO_{2n+1}.