Grupos algebraicos lineales **UNIVERSIDAD DE CHILE**
Prof. Giancarlo Lucchini Facultad de Ciencias

Guía 5

Ejercicio 1. (Variedades completas)

1. Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. Pruebe que X es compacto si y sólo si para todo espacio localmente compacto Y la proyección $X \times Y \to Y$ es cerrada. *Hint: use la compactificación de Alexandrov.*
2. Sea G un grupo algebraico conexo.
   a) Pruebe que todo subgrupo cerrado, conexo y completo de G es central.
   b) Pruebe que existe un único subgrupo maximal con estas propiedades.

Ejercicio 2. (Subgrupos parabólicos y de Borel)

1. Pruebe que T_n es un subgrupo de Borel de GL_n.
2. Una *bandera* en $V = k^n$ es una sucesión de subespacios
$$\{0\} \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_s \subsetneq V.$$
La bandera se dice *completa* si $s = n - 1$ (en cuyo caso $\dim V_i = i$). Pruebe que todo subgrupo de Borel de GL_n es el estabilizador de una bandera completa. *Hint: siga la demostración que nos llevó a Lie-Kolchin.*
3. Considere $V = k^n$ con su producto interior usual. Un subespacio $W \subset V$ se dice *isotrópico* si $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $x, y \in W$. Una *bandera isotrópica* en V es una bandera de subespacios isotrópicos. Ésta es *completa* si es de largo maximal (que es $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Pruebe que todo subgrupo de Borel del grupo ortogonal O_n es el estabilizador de una bandera isotrópica completa. *Hint: busque ayuda en la teoría de formas cuadráticas.*
4. Sea $V = k^{2n}$ y considere la forma bilineal B asociada a la matriz
$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$
donde I_n es la matriz identidad $n \times n$. Describa los subgrupos de Borel de Sp_{2n} de la misma manera que para O_n usando esta forma bilineal. *Hint: busque ayuda en la teoría de formas alternantes.*
5. Sea G un grupo lineal conexo y sea B un subgrupo de Borel de G. Sea σ un automorfismo de G. Pruebe que si $\sigma(b) = b$ para todo $b \in B$, entonces σ es la identidad.
6. Sea G un grupo lineal conexo y sean $P \subset Q$ subgrupos parabólicos de G. Sea X un subconjunto cerrado de G tal que $XP = X$. Pruebe que XQ es cerrado.

Ejercicio 3. (Grupos solubles)

1. Dé un ejemplo de subgrupo finito soluble de SL_2 que no es conjugado a un grupo de matrices triangulares superiores. ¿Porqué Lie-Kolchin no funciona en este caso?
2. Sea G un grupo lineal conexo cuyos elementos son diagonalizables. Pruebe que G es un toro.
3. Sea G un grupo lineal conexo y soluble de dimensión n. Pruebe que existe una cadena:
$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset G_n = G,$$
de subgrupos cerrados, conexos y normales tales que el cociente G_i/G_{i-1} es isomorfo a $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ o $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ para todo $1 \leq i \leq n$.
4. Sea G un grupo lineal unipotente y sea H un subgrupo propio, cerrado y conexo. Pruebe que $\dim N_G(H) > \dim H$. *Hint: Considere $Z(G) \cdot H$.*

5. Sea G un grupo lineal conexo y soluble y sea H un subgrupo cerrado, conexo y nilpotente que coincide con su normalizador. Pruebe que H es el centralizador de un toro maximal. *Hint: recuerde que* $H = H_s \times H_u$ *y que centralizadores y normalizadores son lo mismo para toros.*

Ejercicio 4. (Toros maximales y subgrupos de Borel) Sea G un grupo lineal conexo.

1. Sean $T \subset H$ un toro maximal y un subgrupo cerrado de G. Pruebe que $N_G(H) \subset H^\circ \cdot N_G(T)$.
2. Decimos que $g \in G$ es *regular* si la multiplicidad de la raíz 1 del polinomio característico de $\mathrm{Ad}(g)$ en $\mathfrak{g}$ es minimal.
   a) Pruebe que los elementos regulares de G forman un abierto no vacío.
   b) Pruebe que $g \in G$ es regular si y sólo si su parte semisimple (o diagonalizable) g_s es regular.
   c) Pruebe que un elemento diagonalizable es regular si y sólo si su centralizador tiene dimensión minimal. *Hint: recuerde los resultados sobre automorfismos diagonalizables.*
   d) Pruebe que un elemento diagonalizable $g \in G$ es regular si y sólo si $Z_G(g)^\circ$ es un subgrupo de Cartan.
3. Pruebe que todo subgrupo cerrado, nilpotente maximal C de G tal que $C = N_G(C)^\circ$ es un subgrupo de Cartan.
4. Sea $g = g_s g_u$ la descomposición de Jordan de $g \in G$. Pruebe que $g \in Z_G(g_s)^\circ$.
5. Sea $G = \mathrm{SO}_n$ con $n \geq 3$. Pruebe que existen elementos diagonalizables en G cuyo centralizador no es conexo. *Hint: considere elementos de orden 2.*
6. Sean $T \subset C \subset B \subset G$ un toro maximal, el subgrupo de Cartan correspondiente y un Borel que contiene a ese subgrupo. Supongamos que $\sigma : G \to G$ es un morfismo epiyectivo de grupos algebraicos tal que $\sigma(B) = B$.
   a) Para $b \in B$, considere el morfismo $\phi_b : G \times B \to G$ dado por $\phi_b(g, c) = (\sigma g) b^{-1} c g^{-1} b$, el cual envía (e, e) a e. Pruebe que el subespacio $\mathrm{Im}(d\phi_b)_{(e,e)} \subset \mathfrak{g}$ contiene a $\mathfrak{b}$ y a $(\mathrm{Ad}(b) d\sigma - 1)\mathfrak{g}$.
   b) Pruebe que existe $b \in B$ tal que $\sigma(T) = b^{-1} T b$ y $\mathrm{Ad}(b) d\sigma$ induce una aplicación lineal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ sin valor propio 1.
   c) Pruebe que para tal $b \in B$ la aplicación ϕ_b es dominante.
   d) Pruebe que ϕ_e es epiyectiva, es decir que todo $g \in G$ se escribe de la forma $(\sigma x) b x^{-1}$ con $b \in B$ y $x \in G$.
   e) Deduzca que un morfismo epiyectivo arbitrario $\sigma : G \to G$ fija a un subgrupo de Borel.