Grupos algebraicos lineales **UNIVERSIDAD DE CHILE**
Prof. Giancarlo Lucchini Facultad de Ciencias

Guía 3

Ejercicio 1 (Espacios tangentes I)**.** Describa T_xX en los siguientes casos:

1. X es un punto.
2. $X = \mathbb{A}^n$.
3. $X = \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 \mid ab = 0\}$, $x = (0,0)$.
4. $X = \{(a,b) \in \mathbb{A}^2 \mid a^2 = b^3\}$, $x = (0,0)$.

Ejercicio 2 (Espacios tangentes II)**.** Sean X e Y variedades algebraicas.

1. Sean $x \in X$ e $y \in Y$. Pruebe que $T_{(x,y)}(X \times Y) \simeq T_xX \oplus T_yY$.
2. Pruebe que si X es un cerrado de Y y $\phi : X \to Y$ es la inclusión, entonces $d\phi_x$ es inyectiva para todo $x \in X$.
3. Sea $k[\tau] := k[t]/\langle t^2 \rangle$ el álgebra de los *números duales*. Pruebe que si X es afín existe una biyección entre T_xX y los k-morfismos $\phi : k[X] \to k[\tau]$ tales que $\phi(f) - f(x) \in k\tau$.

Ejercicio 3 (Diferenciales)**.** Sea R un anillo conmutativo y A una R-álgebra conmutativa.

1. Pruebe que si $A = R[T_1, \ldots, T_n]$ entonces $\Omega_{A/R}$ es un A-módulo libre de base $\{dT_i\}_{1 \leq i \leq n}$.
2. Sea $A = R[T]/\langle f \rangle$. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que $\Omega_{A/R} = 0$. ¿Qué ocurre si R es un cuerpo de característica 0?
3. Pruebe que si A es un domino de integridad y F es su cuerpo cociente entonces $\Omega_{F/R} \simeq F \otimes_A \Omega_{A/R}$.
4. Sea k un cuerpo y sea $L = k(x_1, \ldots, x_n)$ una extensión de cuerpos finitamente generada. Pruebe que $\Omega_{L/k}$ es un L-espacio vectorial de dimensión finita generado por los dx_i.
5. Bajo las mismas hipótesis, pruebe que $dx = 0$ si y sólo si $x \in L$ es algebraico sobre k.
6. Pruebe que si $R = k$ y $A = k[T,U]/\langle T^2 - U^3 \rangle$ entonces $\Omega_{A/k}$ no es un A-módulo libre.
7. Sea B otra R-álgebra conmutativa. Pruebe que existe un isomorfismo de $A \otimes_R B$-módulos
$$\Omega_{A \otimes_R B/R} \simeq (\Omega_{A/R} \otimes_R B) \oplus (A \otimes_R \Omega_{B/R}),$$
de forma que $d_{A \otimes_R B/R}$ corresponde a $(d_{A/R} \otimes \mathrm{id}_B) \oplus (\mathrm{id}_A \otimes d_{B/R})$.

Ejercicio 4 (Suavidad)**.** 1. Sea X una variedad afín irreducible. Pruebe que si Ω_X es un $k[X]$-módulo libre entonces X es suave.

2. Pruebe que en ese caso existen $g_1, \ldots, g_e \in k[X]$ tales que $\{dg_1, \ldots, dg_e\}$ es una $k[X]$-base de Ω_X. Pruebe además que tales g_i son algebraicamente independientes.

Ejercicio 5 (Álgebras de Lie I)**.** Sea G un grupo lineal y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.

1. Pruebe que $\mathfrak{g} = L(G^\circ)$.
2. Pruebe que $\mathrm{Ad}(g)$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}$.
3. Sea $\phi : G \to H$ un morfismo de grupos lineales. Pruebe que, para todo $g \in G$ y $X \in \mathfrak{g}$, $(d\phi)((\mathrm{Ad}g)(X)) = \mathrm{Ad}((\phi(g)))(d\phi(X))$.
4. Pruebe que el álgebra de Lie de SL_n es la subálgebra $\mathfrak{sl}_n$ de $\mathfrak{gl}_n$ de matrices con traza nula. *Hint: Use* $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{sl}_n}$.
5. Determine las álgebras de Lie de D_n, T_n y U_n.
6. Sea $\phi : \mathrm{SL}_2 \to \mathrm{PSL}_2$ el morfismo construido en la guía 2, ejercicio 3. Pruebe que $d\phi$ es una biyección.
7. Sea T un toro. Pruebe que existe un isomorfismo canónico $\mathfrak{t} \to k \otimes_{\mathbb{Z}} X_*(T)$.

Ejercicio 6 (Álgebras de Lie II)**.** Sea G un grupo algebraico lineal.

1. Sea $\phi : G \to \mathrm{GL}_n$ una representación racional y escribamos $\phi(x) = (f_{ij}(x))$ con $f_{ij} \in k[G]$. Pruebe que $d\phi(X) = (Xf_{ij})$ para $X \in \mathfrak{g}$.
2. Sea $V \subset k[G]$ un subespacio de dimensión finita $\lambda(g)$-estable para todo $g \in G$. Sea $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ la representación racional definida por λ. Pruebe que $d\phi(X)(f) = Xf$ para $X \in \mathfrak{g}$ y $f \in V$, donde vemos a X como una derivación en $L(G) \subset \mathcal{D}_G$. Demuestre un resultado similar para ρ.
3. Demuestre que $(d\mathrm{Ad}(X))(Y) = [X, Y]$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Inténtelo primero para $G = \mathrm{GL}_n$.
4. Pruebe que el álgebra de Lie del grupo de conmutadores $[G, G]$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$ que contiene todos los elementos de la forma $(\mathrm{Ad}(g) - 1)X$ con $g \in G$ y $X \in \mathfrak{g}$, así como los elementos de la forma $[X, Y]$ con $X, Y \in \mathfrak{g}$. Deduzca que si G conmutativo (resp. soluble), entonces $\mathfrak{g}$ es conmutativa (resp. soluble).
5. Sea $\phi : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación racional. Defina la representación $\Lambda^h\phi$ de G en la potencia exterior $\Lambda^h V$ como
$$(\Lambda^h\phi)(g)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_h) = \phi(g)v_1 \wedge \cdots \wedge \phi(g)v_h.$$
Pruebe que $\Lambda^h\phi$ es una representación racional y que
$$d(\Lambda^h\phi)(X)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_h) = \sum_{i=1}^{h} v_1 \wedge \cdots \wedge (d\phi)(X)v_i \wedge \cdots \wedge v_h.$$
6. Sea $s \in M_n$ y sea $G = \{g \in \mathrm{GL}_n \mid gs(g^t) = s\}$, donde g^t denota la traspuesta de g. Pruebe que G es un subgrupo cerrado de GL_n (por ende lineal). Pruebe que su álgebra de Lie es $\{X \in \mathfrak{gl}_n \mid Xs + s(X^t) = 0\}$
7. Pruebe que si G es un toro (resp. unipotente) entonces todos los elementos de $\mathfrak{g}$ son diagonalizables (resp. nilpotentes).