Grupos algebraicos lineales **UNIVERSIDAD DE CHILE**
Prof. Giancarlo Lucchini Facultad de Ciencias

Guía 2

Ejercicio 1 (Grupos algebraicos)**.** Sean G, G' grupos algebraicos.

1. Verifique que $G \times G'$ es un grupo algebraico con las estructuras de grupo producto y variedad producto.
2. Sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Verifique que la estructura natural de subvariedad de H hace de H un grupo algebraico y de la inclusión $H \hookrightarrow G$ un morfismo de grupos algebraicos.
3. Verifique que los diagramas conmutativos vistos en clases para $A = k[G]$ corresponden a los axiomas de grupo.
4. Defina la noción de grupo prealgebraico basándose en la definición de prevariedad. Pruebe que todo grupo prealgebraico es algebraico.

Ejercicio 2 (Endomorfismos de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ y $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$)**.**

1. Sea $\phi : \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ un morfismo de grupos algebraicos. Pruebe que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi(x) = x^n$.
2. Sea $\phi : \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ un morfismo de grupos algebraicos. Pruebe que existe $a \in k^*$ tal que $\phi(x) = ax$.

Ejercicio 3 (Grupos lineales)**.**

1. Verifique que los subgrupos dados como ejemplos de grupos lineales son efectivamente cerrados de GL_n.
2. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión n. Defina un grupo algebraico $\mathrm{GL}(V)$ cuyo grupo abstracto subyacente sean las aplicaciones lineales invertibles $V \to V$ y que sea isomorfo a GL_n.
3. Sea $A = k[\mathrm{SL}_2]$.
   a) Pruebe que $A \simeq k[T_1, T_2, T_3, T_4]/\langle T_1T_4 - T_2T_3 - 1\rangle$.
   b) Defina t_i como la imagen de T_i en $k[\mathrm{SL}_2]$ y considere la subálgebra $B \subset A$ generada por los t_it_j. Pruebe que $\Delta(B) \subset B \otimes_k B$ y que $\iota(B) \subset B$. Deduzca que existe un grupo algebraico afín PSL_2 cuya álgebra es B.
   c) Pruebe que la inclusión $B \hookrightarrow A$ define un morfismo de grupos algebraicos $\mathrm{SL}_2 \to \mathrm{PSL}_2$ cuyo núcleo es de orden 2.
   d) Pruebe que B es el álgebra de funciones $f \in k[\mathrm{SL}_2]$ tales que $f(-X) = f(X)$ para $X \in \mathrm{SL}_2$.
4. Pruebe que el grupo T_n de matrices triangulares superiores es soluble.

Ejercicio 4 (Conexidad)**.**

1. Pruebe que $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}, \mathrm{GL}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{T}_n, \mathrm{U}_n$ y SL_n son conexos.
2. Pruebe que O_n no es conexo. Sea V el conjunto de las matrices $n \times n$ antisimétricas. Pruebe que $X \mapsto (1+X)^{-1}(1-X)$ define un isomorfismo entre un abierto no vacío de SO_n y un abierto no vacío de V. Deduzca que SO_n es la componente neutra de O_n.
3. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid xy = 0\} \subset \mathbb{A}^2$. Pruebe que X no puede poseer una estructura de grupo algebraico.
4. Sea G un grupo algebraico conexo y sea N un subgrupo finito y normal. Pruebe que N está contenido en el centro de G.

Ejercicio 5 (G-variedades)**.** Sea G un grupo algebraico.

1. Pruebe que todo G-espacio homogéneo principal es isomorfo a G actuando sobre sí mismo por multiplicación por la izquierda.
2. Sea G un subgrupo cerrado de GL_n. Pruebe que $\mathbb{A}^n$ tiene una estructura natural de G-variedad. Determine las órbitas para $G = \mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{D}_n$.

3. Pruebe que $\mathbb{P}^1$ admite una estructura natural de G-espacio homogéneo de $G = \mathrm{GL}_2$. Describa el grupo de isotropía de un punto.
4. Pruebe que la acción diagonal del mismo GL_2 sobre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ tiene dos órbitas y por lo tanto no es homogénea.
5. Generalice estos últimos resultados a GL_n actuando sobre $\mathbb{P}^{n-1}$

Ejercicio 6 (Acción de G sobre álgebras afines)**.** Sea G un grupo algebraico afín.

1. Sea H un subgrupo cerrado de G. Pruebe que
$$H = \{g \in G \mid \lambda(g)I_G(H) = I_G(H)\} = \{g \in G \mid \rho(g)I_G(H) = I_G(H)\}.$$
2. Sea X una G-variedad afín y sea $s : G \to \mathrm{GL}(k[X])$ dada por $(s(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$. Pruebe que existen $V_i \subset k[X]$ con $i \in \mathbb{N}$ tales que:
   - $\dim V_i < \infty$, $V_i \subset V_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $k[X] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$;
   - V_i es $s(G)$-estable y $s : G \to \mathrm{GL}(V_i)$ es un morfismo de grupos algebraicos para todo $i \in \mathbb{N}$.
3. Adapte la demostración del Teorema 2.3.7 del libro para probar que para toda G-variedad X existe un isomorfismo $\phi : X \to V \subset \mathbb{A}^n$ con V cerrado y un morfismo $r : G \to \mathrm{GL}_n$ tal que $\phi(gx) = r(g)\phi(x)$ para todo $g \in G$ y $x \in X$.

Ejercicio 7 (Descomposición de Jordan)**.** Sea G un grupo algebraico lineal.

1. Pruebe que $\lambda(g)_s = \lambda(g_s)$ y $\lambda(g)_u = \lambda(g_u)$.
2. Pruebe que el subconjunto $G_u \subset G$ de los elementos unipotentes es un cerrado.
3. Pruebe que el subconjunto $G_s \subset G$ de los elementos semisimples no es necesariamente un cerrado o un abierto.

Ejercicio 8 (Grupos unipotentes)**.** Sea G un subgrupo de GL_n que actúa de forma irreducible sobre k^n. Pruebe que el único subgrupo unipotente normal de G es el subgrupo trivial.

Ejercicio 9 (Grupos diagonalizables)**.** Sean G, H grupos algebraicos diagonalizables y sean X, Y sus grupos de caracteres respectivos.

1. Haga de los grupos diagonalizables una categoría y pruebe que es anti-equivalente a la categoría de los grupos abelianos finitamente generados.
2. Sea $\phi : G \to H$ un morfismo de grupos algebraicos y sea ϕ^* el morfismo de grupos $Y \to X$ correspondiente (vea la pregunta anterior). Pruebe que si ϕ es inyectivo (resp. epiyectivo) entonces ϕ^* es epiyectivo (resp. inyectivo).
3. Encuentre un isomorfismo canónico de grupos abelianos entre G y $\mathrm{Hom}(X, k^*)$.
4. Si H es un subgrupo cerrado de G y Z es un subgrupo de X, sean:
$$H^\perp := \{\chi \in X \mid \chi(H) = \{1\}\};$$
$$Z^\perp := \{g \in G \mid \chi(g) = 1, \forall\, \chi \in Y\}.$$
   Pruebe que $(H^\perp)^\perp = H$ y $(Z^\perp)^\perp = Z$.
5. Para $n \in \mathbb{N}$, sea G_n el subgrupo de G de elementos cuyo orden divide a n.
   a) Pruebe que $(G_n)^\perp = nX$.
   b) Pruebe que el subgrupo de G de los elementos de orden finito es denso en G.
6. Pruebe que el grupo de automorfismos de un toro algebraico de dimensión n es isomorfo a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.