Grupos algebraicos lineales | **UNIVERSIDAD DE CHILE**
Prof. Giancarlo Lucchini | Facultad de Ciencias

Guía 1

Ejercicio 1 (Topología de Zariski)**.**

1. Pruebe que los cerrados de Zariski de $V = k$ son los subconjuntos finitos.
2. Pruebe que la clausura de Zariski de $X \subset V$ es $V(I(X))$.
3. Pruebe que $X \mapsto I(X)$ define una biyección entre los cerrados de Zariski de V y los ideales radicales de $k[\bar{T}]$ cuya inversa es $I \mapsto V(I)$. Pruebe además que esta biyección invierte los órdenes naturales de estos dos conjuntos (dados por "$\subset$").
4. Pruebe que la topología clásica de $\mathbb{C}^n$ es más fina que la de Zariski.

Ejercicio 2 (Espacios Noetherianos)**.** Pruebe que todo cerrado de un espacio Noetheriano es Noetheriano para la topología inducida.

Ejercicio 3 (Componentes irreducibles)**.**

1. Sea X un espacio Noetheriano. Pruebe que las componentes irreducibles de X son sus subconjuntos cerrados irreducibles maximales.
2. Pruebe que todo ideal radical de $k[\bar{T}]$ es una intersección $I = P_1 \cap \cdots \cap P_s$ de ideales primos. Pruebe que si ninguno de ellos contiene a otro, entonces éstos son únicos salvo orden.

Ejercicio 4 (Conexidad e irreducibilidad)**.**

1. Pruebe que todo espacio Noetheriano es una unión disjunta de una cantidad finita de subconjuntos cerrados, llamados sus componentes conexas. Pruebe que éstas son únicas. Pruebe además que toda componente conexa es una unión de componentes irreducibles.
2. Pruebe que un cerrado $X \subset V = k^n$ es disconexo si y sólo si existen dos ideales $I_1, I_2 \subset k[\bar{T}]$ tales que $I_1 + I_2 = k[\bar{T}]$ e $I_1 \cap I_2 = I(X)$.
3. Sea $X = \{(x, y) \in k^2 \mid xy = 0\}$. Pruebe que X es un cerrado de k^2 que es conexo pero no irreducible.

Ejercicio 5 (Álgebras afines)**.** Sea X un cerrado de Zariski de $V = k^n$ y sea $k[X]$ su álgebra afín.

1. Pruebe que para todo ideal $I \subset k[X]$ se tiene que $I_X(V_X(I)) = \sqrt{I}$ y que para todo subconjunto $Y \subset X$ se tiene $V_X(I_X(Y)) = \bar{Y}$.
2. Pruebe que I_X define una biyección entre los cerrados de Zariski de X y los ideales radicales de $k[X]$ cuya inversa es V_X. Pruebe además que esta biyección invierte los órdenes naturales de estos dos conjuntos (dados por "$\subset$").
3. Sea A una k-álgebra afín. Defina una biyección entre $\mathrm{Max}(A)$ y el conjunto de homomorfismos de k-álgebras $A \to k$.
4. Sea X un cerrado de Zariski de $V = k^n$.
   a) Pruebe que X es irreducible si y sólo si $k[X]$ es un dominio de integridad.
   b) Pruebe que X es conexo si y sólo si los únicos idempotentes de f son 0 y 1.
   c) Sean $X_1, \ldots, X_s$ las componentes irreducibles de X. Si $X_i \cap X_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces existe un isomorfismo
   $$k[X] \to \bigoplus_{i=1}^{s} k[X_i],$$
   definido por las restricciones $k[X] \to k[X_i]$.

Ejercicio 6 (Restricción de haces)**.** Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea Y un subconjunto de X. Pruebe que el haz $\mathcal{O}_X|_Y$ definido en clases es efectivamente un haz sobre Y para la topología inducida.

Ejercicio 7 (Tallos y localizaciones)**.** Sea X una k-variedad afín y sea $x \in X$.

1. Pruebe que $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local, i.e. tiene un único ideal maximal (a saber, las funciones que se anulan en x).
2. Sea $M_x \subset k[X]$ el ideal de las funciones que se anulan en x. Pruebe que $\mathcal{O}_{X,x}$ es isomorfo a la localización $k[X]_{M_x}$.
3. Sea X una variedad afín y sea $D(f)$ un abierto principal de X. Pruebe que existe un isomorfismo entre $\mathcal{O}_X(D(f))$ y $k[X][f^{-1}]$.

Ejercicio 8 (Morfismos)**.**
1. Complete la demostración del hecho que un morfismo de k-álgebras $\psi : k[Y] \to k[X]$ define un único morfismo de espacios anillados $\phi : X \to Y$ tal que $\psi = \phi^*$.
2. Pruebe que estas construcciones definen de hecho una anti-equivalencia de categorías entre k-álgebras afines y k-variedades afines.
3. En particular, deduzca que un morfismo de variedades afines $\phi : X \to Y$ es un isomorfismo si y sólo si $\phi^* : k[Y] \to k[X]$ es un isomorfismo.

Ejercicio 9 (Productos)**.**
1. Sean X, Y dos variedades afines. Pruebe que el conjunto subyacente a la variedad producto $X \times Y$ es el producto de los conjuntos subyacentes a X e Y.
2. Habiendo identificado así los conjuntos, pruebe que la topología de Zariski en $X \times Y$ es mś fina que la topología producto. Dé un ejemplo explícito en el cual estas dos no coincidan.

Ejercicio 10 (Prevariedades)**.**
1. Pruebe que una prevariedad es un espacio Noetheriano.
2. Sea X una prevariedad irreducible y sea $U \subset X$ un abierto. Pruebe que U es irreducible.
3. Complete la demostración de la existencia y unicidad del producto de prevariedades.

Ejercicio 11 (Variedades I (separabilidad))**.**
1. Pruebe que un espacio topológico es Hausdorff si y sólo si la diagonal Δ_X es cerrada en $X \times X$ para la topología producto.
2. Pruebe que el producto de dos variedades es una variedad.
3. Pruebe que una subprevariedad de una variedad es una variedad.
4. Sea X una variedad. Pruebe que hay una forma natural de definir una estructura de variedad en los abiertos y cerrados de X.

Ejercicio 12 (Variedades II)**.**
1. Definimos X como la *recta afín con doble* 0 de la siguiente manera. X es la unión de la recta afín $\mathbb{A}^1$ y de un punto $0'$. El subconjunto $\mathbb{A}^1$ es un subconjunto afín de X con su estructura usual. Por último, se define un segundo subconjunto afín vía
$$\phi : \mathbb{A}^1 \to X \begin{cases} x \mapsto x & x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0' \end{cases},$$
de forma que $\mathrm{Im}(\phi)$ hereda la estructura de $\mathbb{A}^1$ como variedad afín. Pruebe que X es una prevariedad pero no es una variedad.
2. Definimos la *recta proyectiva* $\mathbb{P}^1$ de la misma manera, excepto que aquí llamamos ∞ al punto extra y definimos
$$\psi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{P}^1 \begin{cases} x \mapsto x^{-1} & x \neq 0 \\ 0 \mapsto \infty \end{cases}.$$
Pruebe que $\mathbb{P}^1$ sí es una variedad y que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) = k$. Deduzca que $\mathbb{P}^1$ no es una variedad afín.

3. Sea $U \subset \mathbb{A}^n$ un abierto no vacío. Pruebe que para todo $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(U)$ existen $g, h \in k[T_1, \ldots, T_n]$ tales que h no se anula en U y $f = gh^{-1}$ sobre U. Use esto para probar que $\mathbb{A}^n \smallsetminus \{0\}$ no es una variedad afín para $n \geq 2$.

Ejercicio 13 (Variedades proyectivas). 1. Verifique que las construcciones de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ y $\mathbb{P}^n$ dadas en clases constituyen efectivamente un haz y una prevariedad.

2. Pruebe que una aplicación lineal invertible $k^{n+1} \to k^{n+1}$ define un automorfismo de $\mathbb{P}^n$.
3. Sea V un k-espacio vectorial de dimensión n. Construya una variedad $\mathbb{P}(V)$ cuyo conjunto subyacente sean las rectas de V que pasan por el origen. Pruebe que es isomorfa a $\mathbb{P}^{n-1}$.
4. Sea $f \in k[\tilde{T}]$ un polinomio homogéneo no nulo. Sea A_f el álgebra de funciones racionales gf^{-h} con $g \in k[\tilde{T}]$ homogéneo de grado $\deg g = h \deg f$. Pruebe que $D_{\mathbb{P}^n}(f) := \mathbb{P}^n \smallsetminus V_{\mathbb{P}^n}(\langle f \rangle)$ es un abierto afín de $\mathbb{P}^n$ y que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D_{\mathbb{P}^n}(f)) \simeq A_f$.
5. Sea $I \subset k[\tilde{T}]$ un ideal homogéneo.
   a) Pruebe que $V_{\mathbb{P}^n}(I) = \emptyset$ si y sólo si existe $N \geq 0$ tal que $T_i^N \in I$ para todo i.
   b) Pruebe que $V_{\mathbb{P}^n}(I)$ es irreducible si y sólo si $\sqrt{I}$ es un ideal primo.
6. Defina la siguiente función de conjuntos:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\to \mathbb{P}^{mn+m+n} \\ ([x_0, \ldots, x_n], [y_0, \ldots, y_m]) &\mapsto [x_i y_j]. \end{aligned}$$

   Pruebe que la imagen de ϕ es un cerrado $V^{m,n}$ de $\mathbb{P}^{mn+m+n}$ y que ϕ define un isomorfismo de variedades entre $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ y la subvariedad de $\mathbb{P}^{mn+m+n}$ correspondiente al cerrado $V^{m,n}$. Deduzca que el producto de variedades proyectivas es una variedad proyectiva.

Ejercicio 14 (Dimensión). 1. Pruebe que $\dim \mathbb{A}^n = \dim \mathbb{P}^n = n$.

2. Pruebe que una variedad de dimensión cero es un conjunto finito.
3. Sea $f \in k[\bar{T}]$ irreducible. Pruebe que el lugar de sus ceros es una subvariedad irreducible de $\mathbb{A}^n$ de dimensión $n - 1$.

Ejercicio 15 (Morfismos II). 1. Sea X una variedad. Un subconjunto de X es *localmente cerrado* si corresponde a la intersección de un abierto y un cerrado de X. La unión de una cantidad finita de conjuntos localmente cerrados se llama un *conjunto constructible*.
   a) Pruebe que el complemento de un constructible es constructible.
   b) Sea $\phi : X \to Y$ un morfismo. Pruebe que $\phi(X)$ es constructible en Y.
   c) De forma más general, pruebe que la imagen de todo constructible es constructible.

2. Usando los resultados de la sección sobre morfismos, pruebe el Nullstellensatz de Hilbert.