

# Representaciones Irreducibles del Grupo Simétrico $S_n$ Y Diagramas de Young.

Gonzalo Jiménez A.

23 de junio de 2018

## 1. Introducción

En este documento se construirán las representaciones irreducibles del grupo simétrico  $S_n$  utilizando resultados de combinatoria. Específicamente, veremos que estas representaciones están determinadas por los *Diagramas de Young* correspondientes a las particiones del número  $n$ .

Las secciones 2, 3 y 4 son una simple traducción de [3] con alteraciones menores en algunas demostraciones y ejemplos. La sección 5 presenta una aplicación de la teoría sobre el grupo simétrico  $S_5$ .

## 2. Particiones y Clases de Conjugación

Hemos visto que el número de representaciones irreducibles de  $S_n$  corresponde al número de clases de conjugación de  $S_n$ . Veremos que a su vez este número es el número de particiones de  $n$ .

Recordamos entonces lo que es una partición:

**Definición.** Una *partición* de  $n$  es una tupla  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  de enteros positivos  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 1$  tales que  $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_l$ . Para indicar que  $\lambda$  es una partición de  $n$ , escribimos  $\lambda \vdash n$ .

**Ejemplo 2.1.** Notemos que es posible escribir 5 de varias formas distintas, a saber,  $5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$ .

Se tiene entonces que son particiones de 5 las tuplas  $(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)$ .

**Observación.** Por simple inspección se puede ver que estas son todas las formas de escribir 5 (salvo permutaciones de los sumandos). Se concluye que esas son todas las particiones de 5.

Recordemos que cada permutación  $\sigma \in S_n$  se puede descomponer únicamente como producto de ciclos disjuntos. Así, cada permutación determina de forma natural una partición de  $n$ . Podemos definir entonces  $tipo(\sigma) = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  donde los  $\lambda_i$  son los largos de los ciclos de la permutación  $\sigma$  en orden decreciente (teniendo en cuenta sus multiplicidades), considerando también los ciclos de largo 1.

**Ejemplo 2.2.** Sea  $n = 5$ . Entonces

$$\begin{aligned} tipo((1\ 2\ 3\ 4\ 5)) &= (5), \quad tipo((1\ 2\ 3\ 4)) = (4, 1) \\ tipo((1\ 3)(2\ 4\ 5)) &= (3, 2), \quad tipo((1\ 2)(2\ 3)) = tipo((1\ 2\ 3)) = tipo((1\ 2\ 3)(4)(5)) = (3, 1, 1) \\ tipo((1\ 2)(3\ 4)) &= (2, 2, 1), \quad tipo((1\ 2)) = (2, 1, 1, 1), \quad tipo(Id_5) = (1, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

**Observación.** En un primer curso de álgebra se demuestra que dos permutaciones son conjugadas si y solo si sus descomposiciones en ciclos disjuntos son del mismo tipo (para cada largo posible, ambas permutaciones tienen la misma cantidad de ciclos disjuntos en sus descomposiciones).

En otras palabras, se tiene el siguiente resultado

**Teorema 2.1.** Sean  $\sigma, \tau \in S_n$ . Entonces  $\sigma$  es conjugada a  $\tau$  si y solo si  $tipo(\sigma) = tipo(\tau)$ .

Notemos que dada cualquier partición  $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ , considerando la permutación (escrita en ciclos disjuntos)  $\sigma = (1\ 2\ \dots\ \lambda_1)(\lambda_1+1\ \lambda_1+2\ \dots\ \lambda_1+\lambda_2)\dots(\lambda_1+\dots+\lambda_{l-1}+1\ \lambda_1+\dots+\lambda_{l-1}+2\ \dots\ \lambda_1+\dots+\lambda_{l-1}+\lambda_l = n)$  tendremos que  $tipo(\sigma) = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ .

Se tiene entonces que para cualquier partición existe una permutación cuya descomposición en ciclos disjuntos corresponde a tal partición.

**Corolario 2.2.** El número de representaciones irreducibles de  $S_n$  es el número de particiones de  $n$ .

*Demostración.* En efecto, el número de representaciones irreducibles de  $S_n$  es el número de clases de conjugación del grupo  $S_n$ . Hemos visto que cada clase de conjugación determina una partición. Como además se tiene que aparecen todas las particiones (para cada partición existe una clase de conjugación), tenemos entonces la correspondencia.  $\square$

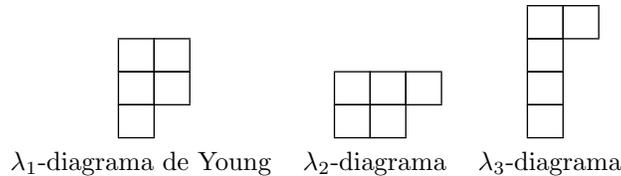
### 3. Diagramas de Young

Hemos visto que las particiones juegan un rol fundamental al momento de determinar la cantidad de representaciones irreducibles. Motivados por este resultado, estudiamos más en detalle sus propiedades.

Una manera de presentar las particiones es vía una familia particular de arreglos de casillas conocidos como *Diagramas de Young*.

**Definición.** Si  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  es una partición de  $n$ , entonces el *Diagrama de Young* (o simplemente *diagrama*) de  $\lambda$  consiste de  $n$  casillas distribuidas entre  $l$  filas, alineadas a la izquierda, donde la  $i$ -ésima fila tiene  $\lambda_i$  casillas.

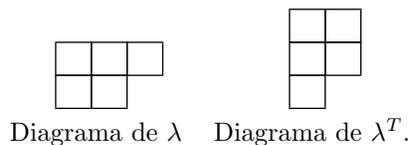
**Ejemplo 3.1.** Estos son ejemplos de diagramas de Young para  $n = 5$  y  $\lambda_1 = (2, 2, 1)$ ,  $\lambda_2 = (3, 2)$  y  $\lambda_3 = (2, 1, 1, 1)$ .



**Observación.** Notemos que cualquier diagrama que consista de  $n$  casillas arregladas en filas tales que el número de casillas en cada fila es no creciente (yendo desde arriba hacia abajo) es el diagrama de Young de una única partición de  $n$ .

**Definición.** Si  $\lambda \vdash n$ , entonces la *partición conjugada*  $\lambda^T$  de  $\lambda$  es la partición cuyo diagrama de Young es la transposición del diagrama de Young de  $\lambda$ . Esto es, el diagrama de Young de  $\lambda^T$  se obtiene a partir del diagrama de  $\lambda$  intercambiando filas y columnas.

**Ejemplo 3.2.** Consideramos  $\lambda = (3, 2)$ . Los diagramas correspondientes son:



Luego  $\lambda^T = (2, 2, 1)$ .

Queremos ahora introducir una noción de orden en el conjunto de las particiones de  $n$ . Consideramos entonces la siguiente relación:

**Definición.** Suponga que  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  y  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  son particiones de  $n$ . Se dirá que  $\lambda$  *domina* a  $\mu$  ( $\lambda \supseteq \mu$ ) si

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i \quad \forall i \geq 1$$

donde, si  $i > l$ , entonces tomamos  $\lambda_i = 0$ , y si  $i > m$ , entonces tomamos  $\mu_i = 0$ .

**Observación.** Decir que la partición  $\lambda$  domina a la partición  $\mu$  significa que  $\forall i \geq 1$  las primeras  $i$  filas del diagrama de  $\lambda$  contienen al menos tantas casillas como las primeras  $i$  filas del diagrama de  $\mu$ .

**Ejemplo 3.3.** Tenemos que  $(4, 1) \supseteq (3, 2)$ , pues  $4 \geq 3$  y  $4 + 1 \geq 3 + 2$ .

**Ejemplo 3.4.** Consideremos para  $n = 6$  las particiones  $(3, 3)$  y  $(4, 1, 1)$ . Notemos que no se tiene que  $(4, 1, 1) \supseteq (3, 3)$ , pues  $4 \geq 3$  pero  $4 + 1 < 3 + 3$ . Tampoco se tiene que  $(3, 3) \supseteq (4, 1, 1)$ , pues  $3 < 4$ .

**Proposición 3.1.** La relación de dominancia satisface:

1. Reflexividad:  $\lambda \supseteq \lambda$ ;
2. Anti-simetría:  $\lambda \supseteq \mu$  y  $\mu \supseteq \lambda$  implica  $\lambda = \mu$ ;
3. Transitividad:  $\lambda \supseteq \mu$  y  $\mu \supseteq \rho$  implica  $\lambda \supseteq \rho$ .

*Demostración.* Notamos que gracias a la observación, las 3 propiedades son directas. Por completitud, se exhiben las demostraciones.

1. Reflexividad: Es claro que se cumple que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \quad \forall i \geq 1$ , luego  $\lambda \supseteq \lambda$ .
2. Anti-simetría: Tenemos entonces que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \quad \forall i \geq 1$ . Considerando  $i = 1$ , se deduce que  $\lambda_1 = \mu_1$ . Considerando  $i = 2$ , por lo anterior, se deduce que  $\lambda_2 = \mu_2$ . Procediendo sucesivamente de esta manera, concluimos que  $\lambda_j = \mu_j \quad \forall j \geq 1$ , es decir,  $\lambda = \mu$ .
3. Transitividad: Tenemos ahora que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i \geq \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_i \quad \forall i \geq 1$ . En particular, se tiene que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \geq \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_i \quad \forall i \geq 1$ . Es decir,  $\lambda \supseteq \rho$ .

□

**Observación.** La Proposición 3.1 nos dice que  $\supseteq$  es una relación de orden en el conjunto de particiones de  $n$ . El Ejemplo 3.4 nos dice que no es un orden total.

Sería muy deseable contar con criterios que nos permitan comparar particiones y establecer si una domina a la otra. Con este objetivo en mente echamos mano a resultados de combinatoria. Necesitamos entonces establecer previamente ciertas definiciones.

**Definición.** Si  $\lambda \vdash n$ , entonces llamamos un  $\lambda$ -tableaux (o *Tableaux de Young de forma  $\lambda$* ) a una numeración de las casillas que componen al  $\lambda$ -diagrama de Young usando los números  $1, 2, \dots, n$ .

**Observación.** Claramente existen  $n!$   $\lambda$ -tableaux.

**Ejemplo 3.5.** Considerando  $\lambda = (4, 1)$ , algunos  $\lambda$ -tableaux son los siguientes

3	1	2	5
4			

1	2	3	4
5			

5	3	2	4
1			

Uno de estos criterios que buscamos es el siguiente: si  $t^\lambda$  es un  $\lambda$ -tableaux y  $s^\mu$  es un  $\mu$ -tableaux tal que, dada cualquier fila de  $s^\mu$ , los enteros pertenecientes a ella pertenecen a distintas columnas de  $t^\lambda$ , entonces  $\lambda \supseteq \mu$ .

Para probar esto, es necesaria la siguiente proposición, que será útil por si misma.

**Proposición 3.2.** Sean  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  y  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  particiones de  $n$ . Suponga que  $t^\lambda$  es un  $\lambda$ -tableaux y  $s^\mu$  es un  $\mu$ -tableaux tal que, dada cualquier fila de  $s^\mu$ , los enteros pertenecientes a ella pertenecen a distintas columnas de  $t^\lambda$ . Entonces podemos encontrar un  $\lambda$ -tableaux  $u^\lambda$  tal que:

1. la  $j$ -ésima columna de  $t^\lambda$  y de  $u^\lambda$  contienen los mismos elementos para  $1 \leq j \leq l$ ;
2. Las entradas de las primeras  $i$  filas de  $s^\mu$  pertenecen a las primeras  $i$  filas de  $u^\lambda$  para cada  $1 \leq i \leq m$ .

*Demostración.* Para cada  $1 \leq r \leq m$  construimos un  $\lambda$ -tableaux  $t_r^\lambda$  tal que:

- a) la  $j$ -ésima columna de  $t^\lambda$  y de  $t_r^\lambda$  contienen los mismos elementos para  $1 \leq j \leq l$ ;
- b) Las entradas de las primeras  $i$  filas de  $s^\mu$  pertenecen a las primeras  $i$  filas de  $t_r^\lambda$  para cada  $1 \leq i \leq r$ .

Tomando  $u^\lambda = t_m^\lambda$  se tiene la demostración. La construcción es por inducción en  $r$ .

Comenzamos con  $r = 1$ . Sea  $k$  un elemento de la primera fila de  $s^\mu$  y sea  $c(k)$  la columna de  $t^\lambda$  que contiene a  $k$ . Si  $k$  está en la primera fila de  $t^\lambda$ , no se hace nada. Si no, cambiamos en  $t^\lambda$  el elemento de la primera fila de la columna  $c(k)$  por  $k$ . Dado que cada elemento de la primera fila de  $s^\mu$  está en una columna diferente, el orden en el que realizamos estas permutaciones no importa. De esta forma, se construye un  $\lambda$ -tableaux  $t_1^\lambda$  que satisface las condiciones a) y b).

Suponemos que  $t_r^\lambda$  satisfaciendo las condiciones a) y b) ha sido construido para  $r$  con  $1 \leq r \leq m - 1$ . Definimos  $t_{r+1}^\lambda$  como sigue. Sea  $k$  una entrada de la fila  $r + 1$  de  $s^\mu$  y sea  $c(k)$  la columna de  $t_r^\lambda$  en donde  $k$  aparece. Si  $k$  ya está en las primeras  $r + 1$  filas de  $t_r^\lambda$ , no hacemos nada. Asumimos entonces que este no es el caso. Notemos que si la fila  $r + 1$  de  $t_r^\lambda$  no intersecta la columna  $c(k)$ , entonces, dado que los tamaños de las filas son no crecientes, se sigue que  $k$  debe estar en las primeras  $r$  filas de  $t_r^\lambda$ . Como este no era el caso, tenemos que  $c(k)$  intersecta a la fila  $r + 1$ . Podemos entonces cambiar  $k$  con el elemento en la fila  $r + 1$  y en la columna  $c(k)$  de  $t_r^\lambda$  sin perder la propiedad b) para  $1 \leq i \leq r$ . Nuevamente, dado que cada entrada de la fila  $r + 1$  de  $s^\mu$  está en una columna diferente de  $t^\lambda$  (y luego, de  $t_r^\lambda$  por la propiedad a)), podemos hacer esto para cada  $k$  independientemente.

De este modo, hemos construido  $t_{r+1}^\lambda$  satisfaciendo a) y b). □

**Ejemplo 3.6.** Suponga que  $t^\lambda$  y  $s^\mu$  están dadas por

$$t^\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad s^\mu = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$$

Notamos que dada cualquier fila de  $s^\mu$ , sus elementos pertenecen a distintas columnas de  $t^\lambda$ .

Se construye  $t_1^\lambda$  permutando en  $t^\lambda$  cada elemento que aparezca en la primera fila de  $s^\mu$ , con el elemento correspondiente a su columna, en la primera fila de  $t^\lambda$ . En este caso, obtenemos

$$t_1^\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

Teniendo el algoritmo resuelto para la primera fila, continuamos con la segunda. Vemos que 4 aparece en la segunda fila de  $t_1^\lambda$ , por lo que no debemos hacer nada. Para 5, vemos que  $t_1^\lambda$  no tiene tercera fila, por lo que 5 debió aparecer antes. Hemos concluido el algoritmo.

Podemos entonces tomar  $u^\lambda = t_1^\lambda$ .

Usamos entonces la Proposición 3.2 para establecer el siguiente criterio de dominancia.

**Lema 3.1.** Sean  $\lambda$  y  $\mu$  particiones de  $n$  y suponga que  $t^\lambda$  y  $s^\mu$  son tableaux de formas  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente. Además, suponga que para cualquier elección de fila de  $s^\mu$ , los enteros pertenecientes a esa fila están en distintas columnas de  $t^\lambda$ . Entonces  $\lambda \supseteq \mu$ .

*Demostración.* Sean  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  y  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ . Por la Proposición 3.2 es posible construir un  $\lambda$ -tableaux  $u^\lambda$  tal que, para  $1 \leq i \leq m$ , las entradas de las primeras  $i$  filas de  $s^\mu$  están en las primeras  $i$  filas de  $u^\lambda$ . Entonces, como  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i$  es el número de entradas en las primeras  $i$  filas de  $u^\lambda$  y  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i$  es el número de entradas en las primeras  $i$  filas de  $s^\mu$ , se sigue que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i \forall i \geq 1$ . Luego,  $\lambda \supseteq \mu$ .  $\square$

## 4. Construcción de Representaciones Irreducibles.

Si  $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ , identificamos  $S_X$  con aquellas permutaciones de  $S_n$  que fijan a todos los elementos que no están en  $X$ . Por ejemplo,  $S_{\{2,3\}}$  está compuesto por  $\{Id, (2\ 3)\}$ .

**Definición.** Sea  $t$  un tableaux. El *estabilizador columna* de  $t$  ( $C_t$ ) es el subgrupo de  $S_n$  que preserve el contenido de las columnas de  $t$ . Esto es,  $\sigma \in C_t$  si y solo si  $\sigma(i)$  está en la misma columna que  $i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Ejemplo 4.1.** Suponga que

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline \end{array}$$

Entonces  $C_t = S_{\{2,5\}}S_{\{1,4\}}S_{\{3\}} \cong S_{\{2,5\}} \times S_{\{1,4\}} \times S_{\{3\}}$ . Así, por ejemplo,  $(2\ 5), (2\ 5)(1\ 4) \in C_t$ . Como  $S_{\{3\}} = \{Id\}$ , se sigue que  $|C_t| = 2! \cdot 2! = 4$ .

El grupo  $S_n$  actúa transitivamente sobre el conjunto de los  $\lambda$ -tableaux aplicando  $\sigma \in S_n$  a las entradas de las casillas. El resultado de aplicar  $\sigma \in S_n$  a  $t$  es denotado por  $\sigma t$ .

**Ejemplo 4.2.** Si

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

y  $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ , entonces

$$\sigma t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 3 \\ \hline 5 & & & \\ \hline \end{array}$$

Definimos ahora la relación  $\sim$  en el conjunto de  $\lambda$ -tableaux. Diremos que  $t_1 \sim t_2$  si tienen las mismas entradas en cada fila.

**Ejemplo 4.3.** Vemos que los siguientes tableaux tienen a los elementos  $\{1, 3, 4\}$  en la primera fila y a  $\{2, 5\}$  en la segunda.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 2 & \\ \hline \end{array}$$

**Observación.** No es difícil ver que la relación  $\sim$  es una relación de equivalencia.

**Definición.** Una  $\sim$ -clase de equivalencia de  $\lambda$ -tableaux es llamada un  $\lambda$ -*tabloide* o un *tabloide de forma  $\lambda$* . El tabloide de un tableau  $t$  es denotado por  $[t]$ . El conjunto de todos los tabloides de forma  $\lambda$  es denotado  $T^\lambda$ .

Denotamos por  $T_\lambda$  al tabloide con  $1, \dots, \lambda_1$  en la fila 1,  $\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_1 + \lambda_2$  en la fila 2, y en general, con  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + 1, \dots, \lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1} + \lambda_i$  en la fila  $i$ . En otras palabras,  $T_\lambda$  es el tabloide correspondiente al tableau que tiene a  $j$  en la  $j$ -ésima casilla.

**Ejemplo 4.4.** Tenemos entonces que  $T_{(3,2)}$  es la clase de equivalencia de

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} .$$

La siguiente proposición implica que la acción de  $S_n$  sobre  $\lambda$ -tableaux induce una acción bien definida de  $S_n$  sobre tabloides de forma  $\lambda$ .

**Proposición 4.1.** Suponga que  $t_1 \sim t_2$  y  $\sigma \in S_n$ . Entonces  $\sigma t_1 \sim \sigma t_2$ . Así, hay una acción bien definida de  $S_n$  en  $T^\lambda$  dada por  $\sigma[t] = [\sigma t]$  para  $t$  un  $\lambda$ -tableau.

*Demostración.* Para mostrar que  $\sigma t_1 \sim \sigma t_2$  tenemos que mostrar que para cualquier fila  $f$  de  $\sigma t_1$ , si el elemento  $i$  está en esa fila, entonces también está en la misma fila  $f$  de  $\sigma t_2$ . En efecto, si  $i$  está en la fila  $f$  de  $\sigma t_1$ , entonces  $\sigma^{-1}(i)$  está en la fila  $f$  de  $t_1$ . Pero  $t_1 \sim t_2$ , luego  $\sigma^{-1}(i)$  está en la fila  $f$  de  $t_2$ , y entonces  $i$  está en la fila  $f$  de  $\sigma t_2$ .

Análogamente, tenemos que los elementos de la fila  $f$  de  $\sigma t_2$  están en la fila  $f$  de  $\sigma t_1$ . Por el teorema de

Cantor-Berstein, tenemos entonces la biyección.  
Como lo anterior se tiene para cualquier fila  $f$ , concluimos lo enunciado.

De acá es inmediato que  $\sigma[t] = [\sigma t]$  determina una acción bien definida de  $S_n$  sobre  $T^\lambda$ .  $\square$

**Observación.** La acción de  $S_n$  sobre los  $\lambda$ -tabloides es transitiva, pues ya lo era sobre los  $\lambda$ -tableaux.

Suponga que  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ . El estabilizador  $S_\lambda$  de  $T_\lambda$  es

$$S_\lambda = S_{\{1, \dots, \lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times S_{\{\lambda_1+\dots+\lambda_{l-1}+1, \dots, n\}}.$$

Así,  $|T^\lambda| = [S_n : S_\lambda] = n!/\lambda_1! \dots \lambda_l!$ . El subgrupo  $S_\lambda$  es llamado el *subgrupo de Young* asociado a la partición  $\lambda$ .

Para una partición  $\lambda$ , denotamos por  $M^\lambda$  a  $\mathbb{C}T^\lambda$  y consideramos  $\varphi^\lambda : S_n \rightarrow GL(M^\lambda)$  la representación por permutaciones asociada.

**Ejemplo 4.5.** Suponga que  $\lambda = (n-1, 1)$ . Entonces dos  $\lambda$ -tableaux son equivalentes si y solo si tienen la misma entrada en la segunda fila. De este modo,  $T^\lambda$  está en biyección con  $\{1, \dots, n\}$  y  $\varphi^\lambda$  es equivalente a la representación standard o por permutaciones. Por otra parte, si  $\lambda = (n)$ , entonces existe un único  $\lambda$ -tabloide. Luego,  $\varphi^\lambda$  es la representación trivial.

Si  $\lambda = (n-2, 2)$ , entonces un par de  $\lambda$ -tabloides son equivalentes si y solo si los subconjuntos de dos elementos en la segunda fila de los tabloides coincide. Así, los  $\lambda$ -tabloides están en biyección con los subconjuntos de dos elementos de  $1, \dots, n$  y  $\varphi^\lambda$  es equivalente a la representación por permutaciones asociada a la acción de  $S_n$  sobre  $[n]^2$ .

Si  $\lambda \neq (n)$ , entonces  $\varphi^\lambda$  es una representación por permutaciones no trivial de  $S_n$  y luego no es irreducible. Sin embargo, contiene una componente irreducible distinguida que ahora buscaremos identificar.

**Definición.** Sea  $\lambda, \mu \vdash n$ . Sea  $t$  un  $\lambda$ -tableaux. Definimos el operador lineal  $A_t : M^\mu \rightarrow M^\mu$  como

$$A_t = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \varphi_\pi^\mu.$$

En el caso  $\lambda = \mu$ , el elemento

$$e_t = A_t[t] = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \pi[t]$$

de  $M^\lambda$  es llamado el *politabloide* asociado a  $t$ .

Nuestra siguiente proposición muestra que la acción de  $S_n$  sobre  $\lambda$ -tableaux es copatible con la definición de  $\lambda$ -tabloide.

**Proposición 4.2.** Si  $\sigma \in S_n$  y  $t$  es un  $\lambda$ -tableaux, entonces  $\varphi_\sigma^\lambda e_t = e_{\sigma t}$ .

*Demostración.* Primero veamos que  $C_{\sigma t} = \sigma C_t \sigma^{-1}$ . En efecto, si  $X_i$  es el conjunto de entradas de la columna  $i$  de  $t$ , entonces  $\sigma(X_i)$  es el conjunto de entradas de la columna  $i$  de  $\sigma t$ . Como  $\tau$  estabiliza  $X_i$  si y solo si  $\sigma \tau \sigma^{-1}$  estabiliza  $\sigma(X_i)$ , la afirmación sigue. Ahora, calculamos

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma^\lambda A_t &= \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \varphi_\sigma^\lambda \varphi_\pi^\lambda \\ &= \sum_{\tau \in C_{\sigma t}} \text{sgn}(\sigma^{-1} \tau \sigma) \varphi_\sigma^\lambda \varphi_{\sigma^{-1} \tau \sigma}^\lambda \\ &= A_{\sigma t} \varphi_\sigma^\lambda \end{aligned}$$

donde hemos hecho la substitución  $\tau = \sigma \pi \sigma^{-1}$ .

Por lo tanto  $\varphi_\sigma^\lambda e_t = \varphi_\sigma^\lambda A_t[t] = A_{\sigma t} \varphi_\sigma^\lambda [t] = A_{\sigma t} [\sigma t] = e_{\sigma t}$ . Esto completa la demostración.  $\square$

Estamos ahora en condiciones de definir la subrepresentación buscada.

**Definición.** Sea  $\lambda$  una partición de  $n$ . Defina  $S^\lambda$  como el subespacio de  $M^\lambda$  generado por los politabloides  $e_t$  con  $t$  un  $\lambda$ -tableaux. La Proposición 4.2 implica que  $S^\lambda$  es  $S_n$ -invariante. Sea  $\psi^\lambda : S_n \rightarrow GL(S^\lambda)$  la correspondiente subrepresentación. Esta subrepresentación es llamada la *Representación de Sprecht asociada a  $\lambda$* .

**Observación.** Los  $e_t$  no son en general linealmente independientes. Esto se verá en el ejemplo que viene.

Nuestro objetivo es probar que las representaciones de Sprecht  $\psi^\lambda$  forman un conjunto completo de representaciones irreducibles de  $S_n$ . Miremos un ejemplo.

**Ejemplo 4.6.** Considere la partición  $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$  de  $n$ . Como cada fila tiene solo un elemento, los  $\lambda$ -tableaux son lo mismo que los  $\lambda$ -tabloides. Así,  $\varphi^\lambda$  es equivalente a la representación regular de  $S_n$ . Sea  $t$  un  $\lambda$ -tableaux. Como  $t$  tiene solo una columna, trivialmente se tiene que  $C_t = S_n$ . Así

$$e_t = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \pi[t].$$

Afirmamos que si  $\sigma \in S_n$ , entonces  $\varphi_\sigma^\lambda e_t = \text{sgn}(\sigma) e_t$ . Como sabemos que  $\varphi_\sigma^\lambda e_t = e_{\sigma t}$  por la Proposición 4.2, se sigue que  $S^\lambda = \mathbb{C} e_t$  y que  $\psi^\lambda$  es equivalente a la representación de grado uno  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

En efecto, calculamos

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma^\lambda e_t &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \varphi_\sigma^\lambda \varphi_\pi^\lambda [t] \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma^{-1} \tau) \varphi_\tau^\lambda [t] \\ &= \text{sgn}(\sigma) e_t \end{aligned}$$

donde hemos usado la substitución  $\tau = \sigma \pi$ .

La demostración de que los  $\psi^\lambda$  son las representaciones irreducibles de  $S_n$  procede vía una serie de lemas.

**Lema 4.1.** Sea  $\lambda, \mu \vdash n$  y suponga que  $t^\lambda$  es un  $\lambda$ -tableaux y  $s^\mu$  es un  $\mu$ -tableaux tal que  $A_{t^\lambda}[s^\mu] \neq 0$ . Entonces  $\lambda \supseteq \mu$ . Además, si  $\lambda = \mu$ , entonces  $A_{t^\lambda}[s^\mu] = \pm e_{t^\lambda}$ .

*Demostración.* Usamos el Lema 3.1. de dominancia. Suponemos que tenemos dos elementos  $i, j$  que están en la misma fila de  $s^\mu$  y en la misma columna de  $t^\lambda$ . Entonces  $(i \ j)[s^\mu] = [s^\mu] = \text{Id}[s^\mu]$  y luego

$$(\varphi_{\text{Id}}^\mu - \varphi_{(i \ j)}^\mu)[s^\mu] = 0.$$

Sea  $H = \{\text{Id}, (i \ j)\}$ . Entonces  $H$  es un subgrupo de  $C_{t^\lambda}$ . Sea  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  un conjunto completo de representantes de clases izquierdas de  $H$  en  $C_{t^\lambda}$ . De este modo, tenemos

$$\begin{aligned} A_{t^\lambda}[s^\mu] &= \sum_{\pi \in C_{t^\lambda}} \text{sgn}(\pi) \varphi_\pi^\mu [s^\mu] \\ &= \sum_{r=1}^k \left( \text{sgn}(\sigma_r) \varphi_{\sigma_r}^\mu + \text{sgn}(\sigma_r (i \ j)) \varphi_{\sigma_r (i \ j)}^\mu \right) [s^\mu] \\ &= \sum_{r=1}^k \text{sgn}(\sigma_r) \varphi_{\sigma_r}^\mu (\varphi_{\text{Id}}^\mu - \varphi_{(i \ j)}^\mu) [s^\mu] \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde la última igualdad usa la ecuación anterior. Esta contradicción implica que los elementos de cada fila de  $s^\mu$  están en diferentes columnas de  $t^\lambda$ . El Lema 3.1 establece entonces que  $\lambda \supseteq \mu$ .

Ahora suponga que  $\lambda = \mu$ . Sea  $u^\lambda$  como en la Proposición 3.2. El hecho que las columnas de  $t^\lambda$  y  $\mu^\lambda$  tengan los mismos elementos implica que la única permutación  $\sigma$  con  $u^\lambda = \sigma t^\lambda$  pertenece a  $C_{t^\lambda}$ . Por otra parte,  $\forall i \geq 1$ , las primeras  $i$  filas de  $s^\mu$  pertenecen a las primeras  $i$  filas de  $u^\lambda$ , pero como  $\lambda = \mu$ , esto implica  $[\mu^\lambda] = [s^\mu]$ . En efecto, la primera fila de  $s^\mu$  está contenida en la primera fila de  $u^\lambda$ . Pero ambas filas tienen el mismo número de casillas. Luego, esas filas deben contener los mismos elementos. Suponga por inducción que cada una de las primeras  $i$  filas de  $u^\lambda$  y  $s^\mu$  tienen los mismos elementos. Entonces como cada elemento de las primeras  $i + 1$  filas de  $s^\mu$  pertenece a las primeras  $i + 1$  filas de  $u^\lambda$ , sigue de la hipótesis inductiva que cada elemento de la fila  $i + 1$  de  $s^\mu$  pertenece a la fila  $i + 1$  de  $u^\lambda$ . Como ambos tableaux son de forma  $\lambda$ , se sigue que tienen la misma  $i + 1$ -ésima fila. Concluimos que  $[u^\lambda] = [s^\mu]$ .

Se sigue que

$$\begin{aligned} A_{t^\lambda}[s^\mu] &= \sum_{\pi \in C_{t^\lambda}} \text{sgn}(\pi) \varphi_\pi^\lambda[s^\mu] \\ &= \sum_{\tau \in C_{t^\lambda}} \text{sgn}(\tau \sigma^{-1}) \varphi_\tau^\lambda \varphi_{\sigma^{-1}}^\lambda[u^\lambda] \\ &= \text{sgn}(\sigma^{-1}) \sum_{\tau \in C_{t^\lambda}} \text{sgn}(\tau) \tau[t^\lambda] \\ &= \pm e_{t^\lambda} \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado el cambio de variables  $\tau = \pi \sigma$ . Esto completa la demostración.  $\square$

El siguiente lema continúa nuestro estudio del operador  $A_t$ .

**Lema 4.2.** Sea  $t$  un  $\lambda$ -tableaux. Entonces la imagen del operador  $A_t : M^\lambda \rightarrow M^\lambda$  es  $\mathbb{C}e_t$ .

*Demostración.* De la ecuación  $e_t = A_t[t]$ , basta con mostrar que la imagen está contenida en  $\mathbb{C}e_t$ . Para probar esto, basta con verificar sobre elementos de la base  $[s] \in T^\lambda$ . Si  $A_t[s] = 0$ , no hay nada que probar; si no, el Lema 4.1 nos dice que  $A_t[s] = \pm e_t \in \mathbb{C}e_t$ . Esto completa la demostración.  $\square$

Recuerde que  $M^\lambda = \mathbb{C}T^\lambda$  viene equipado con un producto interno para el cual  $T^\lambda$  es una base ortonormal y que, además, la representación es unitaria respecto a este producto. Más aún, si  $t$  es un  $\lambda$ -tableaux, entonces

$$A_t^* = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) (\varphi_\pi^\lambda)^* = \sum_{\tau \in C_t} \text{sgn}(\tau) (\varphi_\tau^\lambda) = A_t$$

donde la penúltima igualdad es obtenida tomando  $\tau = \pi^{-1}$  y usando que  $\varphi$  es unitaria. Así,  $A_t$  es auto-adjunta.

La clave para probar que los  $\psi^\lambda$  son las representaciones irreducibles está en el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.** Sea  $\lambda$  una partición de  $n$  y suponga que  $V$  es un subespacio  $S_n$ -invariante de  $M^\lambda$ . Entonces  $S^\lambda \subseteq V$  o bien  $V \subseteq (S^\lambda)^\perp$ .

*Demostración.* Suponga primero que hay un  $\lambda$ -tableaux  $t$  y un vector  $v \in V$  tal que  $A_t v \neq 0$ . Entonces por el Lema 4.2 y la  $S_n$ -invarianza de  $V$ , tenemos  $0 \neq A_t v \in \mathbb{C}e_t \cap V$ . Se sigue que  $e_t \in V$ . Así,  $\forall \sigma \in S_n$ , tenemos  $e_{\sigma t} = \varphi_\sigma^\lambda e_t \in V$ . Como  $S_n$  actúa transitivamente sobre el conjunto de  $\lambda$ -tableaux, se concluye que  $S^\lambda \subseteq V$ . Suponga ahora que, para todo  $\lambda$ -tableaux y todo  $v \in V$ , se tiene  $A_t v = 0$ . Entonces tenemos

$$\langle v, e_t \rangle = \langle v, A_t[t] \rangle = \langle A_t^* v, [t] \rangle = \langle A_t v, [t] \rangle = 0$$

pues  $A_t^* = A_t$  y  $A_t v = 0$ . Como  $t$  y  $v$  fueron arbitrarios, esto muestra que  $V \subseteq (S^\lambda)^\perp$ , completando al demostración.  $\square$

Como corolario vemos que  $S^\lambda$  es irreducible.

**Corolario 4.2.** Sea  $\lambda \vdash n$ . Entonces  $\psi^\lambda : S_n \rightarrow GL(S^\lambda)$  es irreducible.

*Demostración.* Sea  $V$  un subespacio propio  $S_n$ -invariante de  $S^\lambda$ . Entonces por el Teorema 4.1, tenemos  $V \subseteq (S^\lambda)^\perp \cap S^\lambda = \{0\}$ . Esto demuestra el corolario.  $\square$

Hemos construido, para cada partición  $\lambda$  de  $n$ , una representación irreducible de  $S_n$ . El número de clases de conjugación de  $S_n$  es el número de particiones de  $n$ . Entonces, si podemos mostrar que  $\lambda \neq \mu$  implica que  $\psi^\lambda \not\sim \psi^\mu$ , entonces se seguirá que hemos encontrado todas las representaciones irreducibles de  $S_n$ .

**Lema 4.3.** Suponga que  $\lambda, \mu \vdash n$  y sea  $T \in Hom_{S_n}(\varphi^\lambda, \varphi^\mu)$ . Si  $S^\lambda \not\subseteq ker(T)$ , entonces  $\lambda \supseteq \mu$ . Además, si  $\lambda = \mu$ , entonces  $T|_{S^\lambda}$  es un múltiplo escalar de la función identidad.

*Demostración.* El Teorema 4.1 implica que  $ker(T) \subseteq (S^\lambda)^\perp$ . Luego, para cualquier  $\lambda$ -tableaux  $t$ , se sigue que  $0 \neq Te_t = TA_t[t] = A_tT[t]$ , donde la última igualdad usa que  $T$  conmuta con  $\varphi^\lambda(S_n)$  y la definición de  $A_t$ . Ahora,  $T[t]$  es una combinación lineal de  $\mu$ -tabloides, por lo que existe un  $\mu$ -tabloide  $[s]$  tal que  $A_t[s] \neq 0$ . Pero entonces  $\lambda \supseteq \mu$  por el Lema 4.1. Suponga ahora que  $\lambda = \mu$ . Entonces

$$Te_t = A_tT[t] \in \mathbb{C}e_t \subseteq S^\lambda$$

por el Lema 4.2,  $T$  deja a  $S^\lambda$  invariante. Como  $S^\lambda$  es irreducible, el lema de Schur implica que  $T|_{S^\lambda} = c \cdot Id$  para algún  $c \in \mathbb{C}$ .  $\square$

Como consecuencia obtenemos el siguiente resultado.

**Lema 4.4.** Si  $Hom_{S_n}(\varphi^\lambda, \varphi^\mu) \neq 0$ , entonces  $\lambda \supseteq \mu$ . Además, si  $\lambda = \mu$ , entonces  $Hom_{S_n}(\varphi^\lambda, \varphi^\mu) = 1$ .

*Demostración.* Sea  $T : S^\lambda \rightarrow M^\mu$  un morfismo de representaciones no cero. Entonces podemos extender  $T$  a  $M^\lambda = S^\lambda \oplus (S^\lambda)^\perp$  poniendo  $T(v + w) = Tv$  para elementos  $v \in S^\lambda$  y  $w \in (S^\lambda)^\perp$ . Esta extensión es un morfismo de representaciones, pues  $(S^\lambda)^\perp$  es  $S_n$ -invariante y entonces

$$T(\varphi_\sigma^\lambda(v + w)) = T(\varphi_\sigma^\lambda v + \varphi_\sigma^\lambda w) = T\varphi_\sigma^\lambda v = \varphi_\sigma^\mu Tv = \varphi_\sigma^\mu T(v + w).$$

Claramente  $S^\lambda \not\subseteq Ker(T)$  y entonces  $\lambda \supseteq \mu$  por el Lema 4.3. Además, si  $\lambda = \mu$ , entonces  $T$  debe ser un múltiplo escalar de la función inclusión por el Lema 4.3 y así,  $dim Hom_{S_n}(\psi^\lambda, \varphi^\mu) = 1$ .  $\square$

Podemos probar ahora el resultado principal.

**Teorema 4.3.** Las representaciones de Sprech  $\psi^\lambda$  con  $\lambda \vdash n$  forman un conjunto completo de representaciones irreducibles no equivalentes de  $S_n$ .

*Demostración.* Todo lo que resta por mostrar es que  $\psi^\lambda \sim \psi^\mu$  implica  $\lambda = \mu$ . Pero  $\psi^\lambda \sim \psi^\mu$ , implica que  $0 \neq Hom_{S_n}(\psi^\lambda, \psi^\mu) \subseteq Hom_{S_n}(\psi^\lambda, \varphi^\mu)$ . Entonces  $\lambda \supseteq \mu$  por el Lema 4.4. Un argumento análogo muestra que  $\mu \supseteq \lambda$  y entonces  $\lambda = \mu$  por la Proposición 3.1. Esto demuestra el teorema.  $\square$

De hecho, es posible deducir más desde el Lema 4.4.

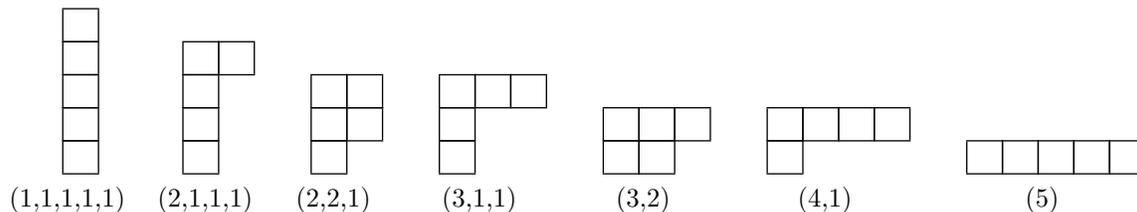
**Corolario 4.4.** Suponga que  $\mu \vdash n$ . Entonces  $\psi^\mu$  aparece con multiplicidad 1 como un componente irreducible de  $\varphi^\mu$ . Cualquier otro componente irreducible  $\psi^\lambda$  de  $\varphi^\mu$  satisface  $\lambda \supseteq \mu$ .

*Demostración.* En efecto, el Lema 4.4 nos dice que la multiplicidad de la componente irreducible es 1. Sea  $\psi^\lambda$  otra componente irreducible distinta de  $\psi^\mu$ , entonces tendremos que  $Hom_{S_n}(\varphi^\lambda, \varphi^\mu) \neq 0$  y el Lema 4.4 nos dice que se tiene  $\lambda \supseteq \mu$ .  $\square$

## 5. Aplicación: El grupo $S_5$ .

Aplicaremos la teoría desarrollada sobre el grupo simétrico  $S_5$  y calcularemos algunas representaciones irreducibles junto con sus caracteres,

En el Ejemplo 2.1 vimos todas las particiones de 5. Los diagramas de Young entonces son:



### 5.1. Representación Trivial

Consideremos la partición  $\lambda = (5)$  de 5. Su diagrama de Young es



Notemos que existe un único (5)-tabloide. Así, para cualquier par de tableaux distintos  $t_1$  y  $t_2$  tendremos que

$$e_{t_1} = A_{t_1}[t_1] = \sum_{\pi \in C_{t_1}} \text{sgn}(\pi)\pi[t_1]$$

Pero  $C_t = \{Id_5\}$  para todo tableaux  $t$ . Luego

$$\sum_{\pi \in C_{t_1}} \text{sgn}(\pi)\pi[t_1] = \sum_{\pi \in C_{t_2}} \text{sgn}(\pi)\pi[t_2] = A_{t_2}[t_2] = e_{t_2}$$

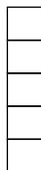
Es decir,  $e_{t_1} = e_{t_2}$  para cualquier par de tableaux. Tenemos entonces que  $S^{(5)} = \mathbb{C}$  y  $\psi^{(5)}$  corresponde a la representación trivial  $\psi^{(5)} : S_5 \rightarrow \mathbb{C}$  con  $\psi^{(5)}(\sigma) = 1 \forall \sigma \in S_5$ .

La tabla del caracter es

$S_5$	$(\cdot)$	$(\cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot)(\cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot \cdot)(\cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot \cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot)$
$\chi_{\psi^{(1,1,1,1,1)}}$	1	1	1	1	1	1	1

### 5.2. Representación Alternante

Consideremos la partición  $\lambda = (1, 1, 1, 1, 1)$  de 5. Su diagrama de Young correspondiente es



Como cada fila tiene solo un elemento, los  $(1, 1, 1, 1, 1)$ -tableaux son lo mismo que los  $(1, 1, 1, 1, 1)$ -tabloides. Así,  $\varphi^{(1,1,1,1,1)}$  es equivalente a la representación regular de  $S_5$ . Sea  $t$  un  $(1, 1, 1, 1, 1)$ -tableaux. Como  $t$  tiene solo una columna, trivialmente se tiene que  $C_t = S_5$ . Así

$$e_t = \sum_{\pi \in S_5} \text{sgn}(\pi) \pi[t].$$

Afirmamos que si  $\sigma \in S_5$ , entonces  $\varphi_\sigma^{(1,1,1,1,1)} e_t = \text{sgn}(\sigma) e_t$ .  
En efecto, calculamos

$$\begin{aligned} \varphi_\sigma^{(1,1,1,1,1)} e_t &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \varphi_\sigma^{(1,1,1,1,1)} \varphi_\pi^{(1,1,1,1,1)} [t] \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma^{-1} \tau) \varphi_\tau^{(1,1,1,1,1)} [t] \\ &= \text{sgn}(\sigma) e_t \end{aligned}$$

donde hemos usado la substitución  $\tau = \sigma\pi$ .

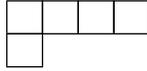
Como sabemos que  $\varphi_\sigma^{(1,1,1,1,1)} e_t = e_{\sigma t}$  por la Proposición 4.2, se sigue que  $e_{\sigma t} = \text{sgn}(\sigma) e_t$ , o en otras palabras,  $S^{(1,1,1,1,1)} = \mathbb{C} e_t$  y que  $\psi^{(1,1,1,1,1)}$  es equivalente a la representación de grado uno  $\text{sgn} : S_5 \rightarrow \mathbb{C}$ .

Calculando el caracter de  $\psi^{(1,1,1,1,1)}$  vemos entonces que

$S_5$	$(\cdot)$	$(\cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot)(\cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot \cdot)(\cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot \cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot)$
$\chi_{\psi^{(1,1,1,1,1)}}$	1	-1	1	1	-1	-1	1

### 5.3. Una Representación de Grado 4

Consideramos la partición  $\lambda = (4, 1)$ . Su diagrama de Young correspondiente es



Notemos que podemos indexar los tabloides de esta partición según la entrada en la segunda fila de los tableaux. Tenemos entonces que existirán 5 tabloides, a saber

$$[t_i] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & i & & & \\ \hline \end{array}$$

con  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Nuestra intención es generar el espacio  $S^{(4,1)}$ . Necesitamos entonces calcular los politabloides  $e_t$  y determinar una base para  $S^{(4,1)}$ . No sabemos la dimensión de este espacio (en principio, podría ser hasta 120, pues cada tableaux genera un politabloide y podrían todos formar un conjunto linealmente independiente), pero ciertamente será menor o igual que 5, pues esta es la cantidad de tabloides distintos que existen para esta partición.

Dentro de los 120 posibles tableaux, consideraremos aquellos de la forma

$$t_{a,b} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline b & & & \\ \hline a & & & \\ \hline \end{array}$$

Con  $a \neq b$ , ambos pertenecientes al conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Esto pues, dado un par de tableaux de la forma  $t_{a,b}$  que sean distintos, digamos  $t_r$  y  $t_s$ , tendremos que  $[t_r] = [t_s]$  y que  $A_{t_r} = (Id_5) - (a\ b) = A_{t_s}$ . Luego  $e_{t_r} = A_{t_r}[t_r] = A_{t_s}[t_s] = e_{t_s}$ . Logrando reducir entonces la cantidad posible de politabloides en la base de 120 a 20 (por principio multiplicativo, pues las libertades de  $a$  son 5 y las de  $b$  son 4). Como la disposición de las entradas no determinadas (es decir, aquellas que no son  $a$  o  $b$ ) no afectan nuestros cálculos, consideramos cualquier representante para un tableaux de la forma  $t_{a,b}$ .

Procedemos a calcular los  $e_{t_{a,b}}$ . Notemos que

$$e_{t_{a,b}} = A_{t_{a,b}}[t_{a,b}] = (Id_5)[t_{a,b}] - (a\ b)[t_{a,b}] = [t_{a,b}] - [t_{b,a}] = [t_a] - [t_b].$$

Luego, las 20 posibles combinaciones posibles entre  $a$  y  $b$  se reducen a 10, pues  $e_{t_{a,b}} = -e_{t_{b,a}}$ .

Los generadores de  $S^{(4,1)}$  ahora se han reducido a los politabloides

$$\begin{array}{cccc} [t_1] - [t_2] & [t_2] - [t_3] & [t_3] - [t_4] & [t_4] - [t_5] \\ [t_1] - [t_3] & [t_2] - [t_4] & [t_3] - [t_5] & \\ [t_1] - [t_4] & [t_2] - [t_5] & & \\ [t_1] - [t_5] & & & \end{array}$$

De donde es evidente que si tomamos el primer elemento de cada columna, tenemos un conjunto linealmente independiente que genera a los otros elementos.

Tenemos entonces nuestra base  $\{[t_1] - [t_2], [t_2] - [t_3], [t_3] - [t_4], [t_4] - [t_5]\} = \{e_{t_{1,2}}, e_{t_{2,3}}, e_{t_{3,4}}, e_{t_{4,5}}\}$ .

Calculamos entonces el caracter de la correspondiente representación de Sprech.

Usando la Proposición 4.2 aplicamos un representante de una clase de conjugación del grupo  $S_5$  a los elementos de la base.

### Clase de la Identidad

Para la clase de conjugación de la identidad, como la dimensión de  $S^{(4,1)}$  es 4, tenemos que el valor del caracter de  $\psi_{(1\ 2)}^{(4,1)}$  en el elemento identidad es 4.

### Clase de la permutación (1 2)

Para la clase de conjugación de  $\sigma = (1\ 2)$ , tenemos  $\psi_{(1\ 2)}^{(4,1)}e_{t_{1,2}} = e_{t_{2,1}} = -e_{t_{1,2}}$ . Por lo que la primera entrada de la diagonal de la matriz de  $\psi_{(1\ 2)}^{(4,1)}$  es -1.

$\psi_{(1\ 2)}^{(4,1)}e_{t_{2,3}} = e_{t_{1,3}} = [t_1] - [t_3] = e_{t_{1,2}} + e_{t_{2,3}}$ . Por lo que la segunda entrada en la diagonal de la matriz es 1.

$\psi_{(1\ 2)}^{(4,1)}e_{t_{3,4}} = e_{t_{3,4}}$ . Por lo que la tercera entrada en la diagonal de la matriz es 1.

$\psi_{(1\ 2)}^{(4,1)}e_{t_{4,5}} = e_{t_{4,5}}$ . Por lo que la cuarta entrada en la diagonal de la matriz es 1.

Concluimos que el valor del caracter de  $\psi^{(4,1)}$  en esta clase de conjugación es 2.

#### Clase de la permutación (1 2 3)

Para la clase de conjugación de  $\sigma = (1\ 2\ 3)$ , tenemos  $\psi_{(1\ 2\ 3)}^{(4,1)} e_{t_{1,2}} = e_{t_{2,3}}$ . Por lo que la primera entrada de la diagonal de la matriz de  $\psi_{(1\ 2\ 3)}^{(4,1)}$  es 0.

$\psi_{(1\ 2\ 3)}^{(4,1)} e_{t_{2,3}} = e_{t_{3,1}} = [t_3] - [t_1] = -e_{t_{1,2}} - e_{t_{2,3}}$ . Por lo que la segunda entrada en la diagonal de la matriz es -1.

$\psi_{(1\ 2\ 3)}^{(4,1)} e_{t_{3,4}} = e_{t_{1,4}} = [t_1] - [t_4] = e_{t_{1,2}} + e_{t_{2,3}} + e_{t_{3,4}}$ . Por lo que la tercera entrada en la diagonal de la matriz es 1.

$\psi_{(1\ 2\ 3)}^{(4,1)} e_{t_{4,5}} = e_{t_{4,5}}$ . Por lo que la cuarta entrada en la diagonal de la matriz es 1.

Concluimos que el valor del caracter de  $\psi^{(4,1)}$  en esta clase de conjugación es 1.

#### Clase de la permutación (1 2)(3 4)

Para la clase de conjugación de  $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ , tenemos  $\psi_{(1\ 2)(3\ 4)}^{(4,1)} e_{t_{1,2}} = e_{t_{2,1}} = -e_{t_{1,2}}$ . Por lo que la primera entrada de la diagonal de la matriz de  $\psi_{(1\ 2)(3\ 4)}^{(4,1)}$  es -1.

$\psi_{(1\ 2)(3\ 4)}^{(4,1)} e_{t_{2,3}} = e_{t_{1,4}} = [t_1] - [t_4] = e_{t_{1,2}} + e_{t_{2,3}} + e_{t_{3,4}}$ . Por lo que la segunda entrada en la diagonal de la matriz es 1.

$\psi_{(1\ 2)(3\ 4)}^{(4,1)} e_{t_{3,4}} = e_{t_{4,3}} = [t_4] - [t_3] = -e_{t_{3,4}}$ . Por lo que la tercera entrada en la diagonal de la matriz es -1.

$\psi_{(1\ 2)(3\ 4)}^{(4,1)} e_{t_{4,5}} = e_{t_{3,5}} = [t_3] - [t_5] = e_{t_{3,4}} + e_{t_{4,5}}$ . Por lo que la cuarta entrada en la diagonal de la matriz es 1.

Concluimos que el valor del caracter de  $\psi^{(4,1)}$  en esta clase de conjugación es 0.

#### Clase de la permutación (1 2 3)(4 5)

Para la clase de conjugación de  $\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$ , tenemos  $\psi_{(1\ 2\ 3)(4\ 5)}^{(4,1)} e_{t_{1,2}} = e_{t_{2,3}}$ . Por lo que la primera entrada de la diagonal de la matriz de  $\psi_{(1\ 2\ 3)(4\ 5)}^{(4,1)}$  es 0.

$\psi_{(1\ 2\ 3)(4\ 5)}^{(4,1)} e_{t_{2,3}} = e_{t_{3,1}} = [t_3] - [t_1] = -e_{t_{1,2}} - e_{t_{2,3}}$ . Por lo que la segunda entrada en la diagonal de la matriz es -1.

$\psi_{(1\ 2\ 3)(4\ 5)}^{(4,1)} e_{t_{3,4}} = e_{t_{1,5}} = [t_1] - [t_5] = e_{t_{1,2}} + e_{t_{2,3}} + e_{t_{3,4}} + e_{t_{4,5}}$ . Por lo que la tercera entrada en la diagonal de la matriz es 1.

$\psi_{(1\ 2\ 3)(4\ 5)}^{(4,1)} e_{t_{4,5}} = e_{t_{5,4}} = [t_5] - [t_4] = -e_{t_{4,5}}$ . Por lo que la cuarta entrada en la diagonal de la matriz es -1.

Concluimos que el valor del caracter de  $\psi^{(4,1)}$  en esta clase de conjugación es -1.

#### Clase de la permutación (1 2 3 4)

Para la clase de conjugación de  $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$ , tenemos  $\psi_{(1\ 2\ 3\ 4)}^{(4,1)} e_{t_{1,2}} = e_{t_{2,3}}$ . Por lo que la primera entrada de la diagonal de la matriz de  $\psi_{(1\ 2\ 3\ 4)}^{(4,1)}$  es 0.

$\psi_{(1\ 2\ 3\ 4)}^{(4,1)} e_{t_{2,3}} = e_{t_{3,4}}$ . Por lo que la segunda entrada en la diagonal de la matriz es 0.

$\psi_{(1\ 2\ 3\ 4)}^{(4,1)} e_{t_{3,4}} = e_{t_{4,1}} = [t_4] - [t_1] = -e_{t_{1,2}} - e_{t_{2,3}} - e_{t_{3,4}}$ . Por lo que la tercera entrada en la diagonal de la matriz es -1.

$\psi_{(1\ 2\ 3\ 4)}^{(4,1)} e_{t_{4,5}} = e_{t_{1,5}} = [t_1] - [t_5] = e_{t_{1,2}} + e_{t_{2,3}} + e_{t_{3,4}} + e_{t_{4,5}}$ . Por lo que la cuarta entrada en la diagonal de la matriz es 1.

Concluimos que el valor del caracter de  $\psi^{(4,1)}$  en esta clase de conjugación es 0.

#### Clase de la permutación (1 2 3 4 5)

Finalmente, para la clase de conjugación de  $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ , tenemos  $\psi_{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}^{(4,1)} e_{t_{1,2}} = e_{t_{2,3}}$ . Por lo que la primera entrada de la diagonal de la matriz de  $\psi_{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}^{(4,1)}$  es 0.

$\psi_{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}^{(4,1)} e_{t_{2,3}} = e_{t_{3,4}}$ . Por lo que la segunda entrada en la diagonal de la matriz es 0.

$\psi_{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}^{(4,1)} e_{t_{3,4}} = e_{t_{4,5}}$ . Por lo que la tercera entrada en la diagonal de la matriz es 0.

$\psi_{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}^{(4,1)} e_{t_{4,5}} = e_{t_{5,1}} = [t_5] - [t_1] = -e_{t_{1,2}} - e_{t_{2,3}} - e_{t_{3,4}} - e_{t_{4,5}}$ . Por lo que la cuarta entrada en la diagonal de la matriz es -1.

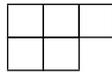
Concluimos que el valor del caracter de  $\psi^{(4,1)}$  en esta clase de conjugación es -1.

En resumen, la tabla del caracter de  $\psi^{(4,1)}$  queda así

$S_5$	(·)	(··)	(· · ·)	(··)(··)	(· · ·)(··)	(· · · ·)	(· · · · ·)
$\chi_{\psi^{(4,1)}}$	4	2	1	0	-1	0	-1

## 5.4. Una Representación de Grado 5

Consideramos la partición  $\lambda = (3, 2)$ . Su diagrama de Young correspondiente es



Notemos que podemos indexar los tabloides de esta partición según las entradas en la segunda fila de los tableaux. Tenemos entonces que existirán 10 tabloides, a saber

$$[t_{ij}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline i & j & \\ \hline \end{array}$$

con  $i \neq j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , pues  $i$  tiene 5 libertades,  $j$  tiene 4 y  $[t_{ij}] = [t_{ji}]$ .

Tal como en la representación anterior, nuestra intención es generar el espacio  $S^{(3,2)}$ . Necesitamos entonces calcular los politabloides  $e_t$  y determinar una base para  $S^{(3,2)}$ . No sabemos la dimensión de este espacio (en principio, podría ser hasta 120, pues cada tableaux genera un politabloide y podrían todos formar un conjunto linealmente independiente), pero ciertamente será menor o igual que 10, pues esta es la cantidad

de tabloides distintos que existen para esta partición.

Dado que la cantidad de cálculos es extensa, nos limitamos a indicar una observación que nos permite reducir el trabajo.

Los 120 posibles tableaux se pueden presentar como tableaux de la siguiente forma

$$t_{a,c}^{b,d} = \begin{array}{|c|c|} \hline b & c \\ \hline a & d \\ \hline \end{array}$$

Con  $a, b, c, d$  distintos entre sí y pertenecientes al conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Notemos que para un tableaux  $t_{a,c}^{b,d}$ , el operador  $A_{t_{a,c}^{b,d}}$  corresponde a

$$A_{t_{a,c}^{b,d}} = (Id_5) - (a\ b) - (c\ d) + (a\ b)(c\ d)$$

y de acá es claro que  $A_{t_{a,c}^{b,d}} = A_{t_{b,d}^{a,c}} = A_{t_{d,b}^{c,a}} = A_{t_{c,a}^{d,b}}$ .

**Observación.** Por el Lema 4.1 y el cálculo anterior, hemos logrado reducir nuestra búsqueda de la base de 120 elementos a 30 elementos.

**Observación.** Si por algún motivo se conociera de forma previa la dimensión de la representación a buscar, evidentemente es suficiente con buscar elementos linealmente independientes hasta encontrar la cantidad adecuada para satisfacer la dimensión de la base y por consiguiente la de la representación.

Omitiendo los cálculos de los  $e_t$ , presentamos una posible base para el espacio  $S^{(3,2)}$ .

$$\{e_{t_{1,2}^{3,4}}, e_{t_{1,3}^{2,4}}, e_{t_{1,5}^{2,3}}, e_{t_{3,5}^{1,2}}, e_{t_{4,5}^{1,2}}\}$$

**Observación.** Existe teoría que permite disminuir la cantidad de cálculos de los  $e_t$ , pero escapa de nuestros objetivos en este documento. Como referencia, ver [2]

Ya con una base determinada, basta con hacer las cuentas para determinar el caracter de la representación buscada.

Nuevamente, omitimos los cálculos para presentar la tabla del caracter correspondiente a esta representación de Specht  $\psi^{(3,2)}$ .

$S_5$	$(\cdot)$	$(\cdot\cdot)$	$(\cdot\cdot\cdot)$	$(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)$	$(\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot)$	$(\cdot\cdot\cdot\cdot)$	$(\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)$
$\chi_{\psi^{(3,2)}}$	5	1	-1	1	1	-1	0

**Observación.** Notar que ahora estamos en condiciones de determinar completamente los caracteres irreducibles de  $S_5$ , pues tenemos dos caracteres de grado 1, uno de grado 4 y uno de grado 5. Tomando el producto con la representación alternante, generamos otro nuevo caracter de grado 4 y otro nuevo caracter de grado 5.

Sumando los cuadrados de las dimensiones, vemos que la única alternativa posible para el caracter restante es ser de grado 6, y podemos calcularlo usando el producto interno de caracteres con ayuda del caracter regular.

Por completitud, se presenta la tabla de caracteres irreducibles de  $S_5$ .

$S_5$	$(\cdot)$	$(\cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot)(\cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot \cdot)(\cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot \cdot \cdot)$	$(\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot)$
$\chi_{\psi^{(5)}}$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{\psi^{(1,1,1,1,1)}}$	1	-1	1	1	-1	-1	1
$\chi_{\psi^{(4,1)}}$	4	2	1	0	-1	0	-1
$\chi_{\psi^{(2,1,1,1)}}$	4	-2	1	0	1	0	-1
$\chi_{\psi^{(3,2)}}$	5	1	-1	1	1	-1	0
$\chi_{\psi^{(2,2,1)}}$	5	-1	-1	1	-1	1	0
$\chi_{\psi^{(3,1,1,1)}}$	6	0	0	-2	0	0	1

## Referencias

- [1] J. Gordon, M. W. Liebeck. *Representations and characters of groups*. Cambridge University Press (2001).
- [2] B. E. Sagan. *The symmetric group - Representations, combinatorial, algorithms, and symmetric functions* Springer GTM 203 (2001).
- [3] B. Steinberg. *Representation theory of finite groups - An introductory approach*. Springer Universitext. (2012), 117–129.