Facultad de Ciencias, Universidad de Chile
Departamento de Matemáticas

Representaciones de Grupos

Sebastián Rahausen

23 de Junio, 2018

UNA APLICACIÓN A GEOMETRÍA COMPLEJA

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es aplicar la teoría de representaciones de grupos para descomponer una variedad jacobiana que admite la acción de un grupo finito.

En las secciones 2 y 3 se introducirán los objetos geométricos que vamos a estudiar en este trabajo y veremos algunas de sus propiedades básicas. En la sección 4 se verá una aplicación de la teoria de representaciones de grupos para descomponer una variedad abeliana que admite la acción de un grupo finito. En la sección 5 se usará los visto en las secciones anteriores para encontrar una descomposición de la variedad jacobiana de una superficie de Riemann que admite la acción de un grupo finito. Este es el objetivo final de este trabajo.

2. Toros Complejos y Variedades Abelianas

En esta sección introduciremos el concepto de toro complejo y el concepto de variedad abeliana. Veremos algunas de sus propiedades principales y ejemplos.

Definición 2.1. *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita g y Γ un* reticulado *en V. Por definición Γ es un subgrupo discreto de rango $2g$ en V, y por tanto $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^{2g}$. El grupo cuociente $T = V/\Gamma$ es llamado un* toro complejo *y se le puede poner una estructura de manifold (variedad topológica) complejo compacto, de dimensión compleja g.*

Ejemplo 2.1.
1. *$E_\tau = \mathbb{C}/\langle 1, \tau\rangle_{\mathbb{Z}}$ es un toro complejo de dimensión 1 si $Im\tau > 0$. Para todo toro complejo T de dimensión 1, existe τ con $Im\tau > 0$ tal que T es biholomorfo a E_τ.*
2. *Sea $\Gamma = \langle (1,0), (0,1), (i,0), (0,i)\rangle_{\mathbb{Z}}$, entonces $\mathbb{C}^2/\Gamma$ es un toro complejo de dimensión 2.*

Definición 2.2. *Sean T_1, T_2 dos toros complejos.*
1. *Un* homomorfismo *de T_1 en T_2 es una función holomorfa $f : T_1 \to T_2$ que además es un homomorfismo de grupos.*
2. *Para $z_0 \in T_2$ se define la* traslación por z_0 *como la función holomorfa $t_{z_0} : T_2 \to T_2$ dada por $t_{z_0}(z) = z + z_0$.*

Proposición 2.1. *Sea $h : T_1 \to T_2$ una función holomorfa, con $T_1 = V_1/\Gamma_1$ y $T_2 = V_2/\Gamma_2$. Entonces*
1. *existe un único homomorfismo $f : T_1 \to T_2$ tal que*
$$h = t_{h(0)} \circ f$$
es decir, $h(z) = f(z) + h(0)$ para todo $z \in T_1$.
2. *Existe una única función $\mathbb{C}$-lineal $F : V_1 \to V_2$ con $F(\Gamma_1) \subset \Gamma_2$ que induce el homomorfismo f.*

Con la suma punto a punto, el conjunto de homomorfismos de T_1 a T_2 es un grupo abeliano, denotado por $\mathrm{Hom}(T_1, T_2)$. La proposición anterior da un homomorfismo inyectivo
$$\rho_a : \mathrm{Hom}(T_1, T_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2) \ , \quad f \mapsto \rho_a(f) = F$$
llamado la *representación analítica* de $\mathrm{Hom}(T_1, T_2)$.

Por otra parte, la restricción F_{Γ_1} de F al reticulado Γ_1 es $\mathbb{Z}$-lineal; además, F_{Γ_1} determina a F y a f completamente. Así, obtenemos un homomorfismo inyectivo
$$\rho_r : \mathrm{Hom}(T_1, T_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_1, \Gamma_2) \ , \quad f \mapsto \rho_a(f) = F_{\Gamma_1}$$
llamado la *representación racional* de $\mathrm{Hom}(T_1, T_2)$.

En particular si $T_1 = T_2$, un homomorfismo $f : T_1 \to T_2$ se dice un *endomorfismo* de T_1 y se tiene que ρ_a es representación del anillo $\mathrm{End}(T_1) = \mathrm{Hom}(T_1, T_1)$ y ρ_r es representación del anillo $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(T_1) = \mathrm{End}(T_1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Si $g_1 = \dim_{\mathbb{C}} V_1$, notar que $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_1) \simeq \mathrm{M}(g_1, \mathbb{C})$ y $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\Gamma_1) \simeq \mathrm{M}(2g_1, \mathbb{Z})$. Así, en este caso se obtienen representaciones matriciales.

Ejemplo 2.2. 1. *Para todo toro $T = V/\Gamma$ y para todo entero n se tiene el endomorfismo $n_T : T \to T$ inducido por $F : V \to V$ dado por $F(z) = nz$. Notar que $Ker(f) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, donde $g = dimT$.*

2. *Sean $\Gamma_1 = \langle(1,0),(0,1),(i,0),(0,i)\rangle_{\mathbb{Z}}$, $\Gamma_2 = \langle 1, i\rangle_{\mathbb{Z}}$ y sean $T_1 = \mathbb{C}^2/\Gamma_1$, $T_2 = \mathbb{C}/\Gamma_2$ toros complejos. Entonces $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dada por $F(z_1, z_2) = 3z_1$ induce un homomorfismo de toros $f : T_1 \to T_2$ tal que $Ker(f)$ es unión de 9 componentes conexas disjuntas (cada una es una traslación de un toro complejo de dimensión 1). Por tanto $Ker(f)$ es infinito.*

Definición 2.3. 1. *Sean $T = V/\Gamma$ un toro complejo y $S \subset T$. Se dice que S es un* subtoro *de T si existe un $\mathbb{C}$-subespacio vectorial W de V y un reticulado Λ en W tal que $\Lambda = W \cap \Gamma$ y tal que $S = W/\Lambda$.*

2. *Un toro complejo se dice* simple *si no contiene subtoros que no sean $\{0\}$ ó el mismo.*

Ejemplo 2.3. 1. *Cada curva elíptica es un toro complejo simple.*

2. *Se demuestra que todo toro complejo "muy general" es simple.*
3. *Un toro complejo T tal que $End(T) \simeq \mathbb{Z}$, es simple.*

Proposición 2.2. *Sea $f : T_1 \to T_2$ un homomorfismo de toros complejos. Entonces $Im(f)$ es un subtoro de T_2.*

De hecho, si $f : T_1 \to T_2$ un homomorfismo de toros complejos con $T_i = V_i/\Gamma_i$, entonces $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(F)/(\mathrm{Im}(F) \cap \Gamma_2)$, donde $F = \rho_a(f)$.

Definición 2.4. *Si T_1, T_2 son dos toros complejos, una* isogenia *es un homomorfismo de toros $f : T_1 \to T_2$ con núcleo finito y sobreyectivo. Si existe una isogenia entre dos toros complejos T_1 y T_2, decimos que ellos son* isógenos *y anotamos $T_1 \sim T_2$.*

Ejemplo 2.4. *Considerando el Ejemplo 2.2. anterior, $n_T : T \to T$ es una isogenia y $f : T_1 \to T_2$ no es una isogenia.*

Definición 2.5. 1. *Una* polarización *en un toro complejo $T = V/\Gamma$ es una forma $\mathbb{R}$-bilineal alternante E en V, que verifica $E(\Gamma \times \Gamma) \subset \mathbb{Z}$, $E(ix, iy) = E(x, y)$ para todo $x, y \in V$ y $E(ix, x) > 0$ para todo $x \in V \setminus \{0\}$.*

2. *Una* variedad abeliana *es un toro complejo T en el cual existe una polarización.*
3. *Una* variedad abeliana polarizada *es un par (T, E) donde T es un toro complejo y E una polarización en T.*

Ejemplo 2.5. 1. *Para todo toro complejo E_τ de dimensión 1 existe una polarización E, cuya matriz en la base $\{1, \tau\}$ es $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, cada toro complejo de dimensión 1 es una variedad abeliana (curva elíptica).*

2. *Sea $\Gamma = \langle(1,0),(0,1),(i\sqrt{2}, i\sqrt{3}),(i\sqrt{5}, i\sqrt{7})\rangle_{\mathbb{Z}}$, entonces el toro $\mathbb{C}^2/\Gamma$ no es una variedad abeliana ya que las coordenedas de los vectores de Γ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$.*

Definición 2.6. *Si T_1 es un toro complejo, (T_2, E) es una variedad abeliana polarizada y $f : T_1 \to T_2$ es un homomorfismo con núcleo finito, entonces podemos definir una polarización en T_1 por $f^*(E)(x, y) = E(\rho_a(f)(x), \rho_a(f)(y))$. Esta polarización se llama la* polarización inducida *por f.*

Definición 2.7. *Un* homomorfismo *entre variedades abelianas polarizadas (T_1, E_1) y (T_2, E_2) es un homomorfismo (con núcleo finito) $f : T_1 \to T_2$ de toros complejos tal que $E_1 = f^*(E_2)$.*

Proposición 2.3. *Todo subtoro de una variedad abeliana es una variedad abeliana.*

Demostración. Se restringe la polarización. □

Teorema 2.1. *(Reducibilidad de Poincaré) Sea (T, E) una variedad abeliana polarizada y sea S un subtoro de T. Entonces existe un subtoro R de T tal que $T = S + R$ y tal que $S \cap R$ es finito. En otras palabras, la función adición $S \times R \to T$ es una isogenia.*

Observación 2.1. *La conclusión del Teorema de Reducibilidad de Poincaré no vale para toros complejos generales (toros complejos que no son variedades abelianas).*

El siguiente resultado sigue del Teorema de Reducibilidad de Poincaré por inducción sobre la dimensión de A.

Teorema 2.2. *(Reducibilidad completa de Poincaré) Dada una variedad abeliana A, existe una isogenia $A \to A_1^{n_1} \times \cdots \times A_r^{n_r}$, donde cada A_i es una variedad abeliana simple. Más aún, las variedades A_i y los enteros n_i son únicos módulo isogenia y permutaciones.*

Ciertos toros complejos pueden ser escritos de diversas formas como producto de subtoros simples. Sin embargo, si uno toma en cuenta las polarizaciones, se tiene unicidad.

Definición 2.8. 1. *Diremos que una variedad abeliana es* simple*, si lo es como toro complejo.*
2. *Diremos que una variedad abeliana polarizada es* indescomponible *si no es el producto de variedades abelianas polarizadas de menor dimensión.*

Observación 2.2. 1. *Existen variedades abelianas polarizadas indescomponibles que no son simples.*
2. *Cada curva elíptica es una variedad abeliana polarizada indescomponible y simple.*

3. Superficies de Riemann y Variedades Jacobianas

En esta sección veremos que a cada superficie de Riemann compacta X se le asocia una variedad abeliana (principalmente) polarizada JX, que se llama variedad jacobiana. También veremos que una acción de un grupo G en una superficie de Riemann X induce naturalmente una acción de G en su variedad jacobiana JX.

Definición 3.1. *Una* superficie de Riemann *es un manifold complejo de dimensión 1.*

Ejemplo 3.1. 1. *$\mathbb{C}$ y $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$ son superficies de Riemann no compactas.*
2. *La esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1$ y cada toro complejo de dimensión 1 son superficies de Riemann compactas. Se demuestra que S^2 es biholomorfo a $\mathbb{P}^1$.*

Se tiene el siguiente resultado

Proposición 3.1. *Cada superficie de Riemann compacta es difeomorfa a una superficie real C^∞ orientable de género $g \geq 0$.*

Ejemplo 3.2. 1. *La esfera S^2 y el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1$ son de género 0.*
2. *Cada toro complejo de dimensión 1 (curva elíptica) es de género 1.*
3. *Cada curva hiperelíptica es de género $g \geq 2$.*

Sea X una superficie de Riemann compacta de género g y sea $\Omega^1(X)$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de 1-formas holomorfas en X. Usando el Teorema de Riemann-Roch para superficies de Riemann se puede demostrar que $\dim_{\mathbb{C}}\Omega^1(X) = g$. Sea $\omega_1, \ldots, \omega_g$ una base para $\Omega^1(X)$. Esto nos permite identificar el espacio dual $\Omega^1(X)^*$ con el espacio de vectores columnas $\mathbb{C}^g$, asociando a cada funcional λ el vector columna $(\lambda(\omega_1), \ldots, \lambda(\omega_g))^t$. Esto define un isomorfismo $\Omega^1(X)^* \simeq \mathbb{C}^g$.

El grupo de homología $H_1(X, \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano libre de rango $2g$, y por tanto $H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$. Este grupo $H_1(X, \mathbb{Z})$ se puede incrustar en el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\Omega^1(X)^*$ de la siguiente manera. A cada clase de homología $[c] \in H_1(X, \mathbb{Z})$ se le asocia el funcional

$$\lambda_c : \Omega^1(X) \to \mathbb{C} \ , \quad \omega \mapsto \int_c \omega$$

Definición 3.2. *Un funcional lineal $\lambda : \Omega^1(X) \to \mathbb{C}$ es un* período *si es λ_c para alguna clase de homología $[c] \in H_1(X, \mathbb{Z})$.*

Luego, se puede definir una función $\Phi_X : H_1(X, \mathbb{Z}) \to \Omega^1(X)^*$, $[c] \mapsto \lambda_c$. Se puede demostrar que Φ_X es una función bien definida y que es un homomorfismo inyectivo. La imagen $\Phi_X(H_1(X, \mathbb{Z})) \simeq H_1(X, \mathbb{Z})$ es un subgrupo discreto de rango $2g$ (un reticulado) en $\Omega^1(X)^*$. Sea $\Gamma \simeq H_1(X, \mathbb{Z})$ el reticulado en $\mathbb{C}^g \simeq \Omega^1(X)^*$ que se obtiene vía los isomorfismos anteriores.

Definición 3.3. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Bajo las identificaciones anteriores, la* variedad jacobiana *de X, denotada por JX, es el toro complejo*

$$JX = \Omega^1(X)^*/\Phi_X(H_1(X, \mathbb{Z})) \simeq \mathbb{C}^g/\Gamma.$$

Ejemplo 3.3. 1. *Si $X = S^2$ ó $X = \mathbb{P}^1$, entonces $JX = \{0\}$ ya que $\Omega^1(X) = \{0\}$.*
2. *Si X es un toro complejo de dimensión 1, entonces $JX \simeq X$.*
3. *Si X es una curva hiperelíptica, entonces JX es un toro complejo de dimensión ≥ 2.*

El toro complejo JX es una variedad abeliana. De hecho, existe una polarización (principal) canónica en JX que introducimos ahora: fijemos una base de homología $\alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g$ de $H_1(X, \mathbb{Z})$. Como antes, identifiquemos $\Omega^1(X)^* \simeq \mathbb{C}^g$ y el reticulado $H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \Gamma \subset \mathbb{C}^g$. Notar que Γ es una $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}^g$.

Bajo estas identificaciones se define $E : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z}$ por $E(\alpha_i, \beta_j) =$ número de intersección de α y β, y se extiende $\mathbb{R}$-bilinealmente a $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g$. La matriz de la forma E con respecto a la $\mathbb{R}$-base Γ es

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede demostrar que la forma $\mathbb{R}$-bilineal E es una polarización (principal) en JX. Por tanto (JX, E) es una variedad abeliana (principalmente) polarizada.

Observación 3.1. *Si X es una superficie de Riemann compacta, entonces (JX, E) es una variedad abeliana (principalmente) polarizada indescomponible, pero no es necesariamente simple.*

Ahora veremos como una acción de un grupo en una superficie de Riemann X induce una acción en su variedad jacobiana JX.

Dada una función lineal $T : V \to W$ entre espacios vectoriales, entonces existe una función lineal dual $T^* : W^* \to V^*$. Fijemos bases para V y W y las correspondientes bases duales para V^* y W^*. Las representaciones matriciales de T y T^* están relacionadas por $[T^*] = [T]^t$. Si un grupo G actúa en el espacio vectorial V, se induce una acción de G en V^* dada por

$$G \times V^* \to V^*, \quad (g, f) \mapsto f \circ g^{-1}$$

Para cada $g \in G$ las matrices asociadas están relacionadas por $[g^*] = [g]^{-t}$. Esta es la *acción dual*.

Dada una acción de un grupo finito G en una superficie de Riemann X sea $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(X)$ el monomorfismo asociado. Notar que el pullback φ^* induce una acción en $\Omega^1(X)$ de la siguiente manera

$$\psi : G \to \mathrm{Aut}(\Omega^1(X)), \quad g \mapsto \psi_g : \Omega^1(X) \to \Omega^1(X)$$

donde $\psi_g(\omega) = \varphi^*_{g^{-1}}\omega$. La acción dual induce una acción de G en el espacio $\Omega^1(X)^*$. Esto define una acción de G en $\Omega^1(X)^*$.

Lema 3.1. *Sea $F : X \to Y$ una función holomorfa entre superficies de Riemann, $\gamma : [a, b] \to X$ un camino en X y $\omega \in \Omega^1(Y)$, entonces*

$$\int_{F_*\gamma} \omega = \int_\gamma F^*\omega$$

El lema anterior implica que la acción de G en $\Omega^1(X)^*$ lleva períodos en períodos. Por tanto hay una acción (fiel) inducida en JX. En conclusión, cada acción de un grupo G en una superficie de Riemann induce una acción de G en JX. Esta acción es llamada la *acción natural en la variedad Jacobiana.*

4. Descomposición isotípica de una Variedad Abeliana

En esta sección veremos como se puede aplicar la teoría de representaciones de grupos para descomponer una variedad abeliana que admite una acción de un grupo finito G tal que $\#\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}G = \#\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$.

Sea $A = V/\Gamma$ una variedad abeliana de dimensión g con una acción fiel por un grupo G; esto es, existe un monomorfismo $\rho : G \to \mathrm{Aut}(A)$. La acción de G en A induce dos representaciones (fieles) de G, una inducida por la representación analítica de $\mathrm{End}(A)$

$$\rho_a : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \simeq \mathrm{GL}(g, \mathbb{C}) \ , \quad g \mapsto \rho_a(\rho(g))$$

y otra inducida por la representación racional de $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(A)$

$$\rho_r : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\Gamma) \simeq \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z}) \ , \quad g \mapsto \rho_r(\rho(g))$$

Además, la acción de G en A induce un homomorfismo de $\mathbb{Q}G$-módulos semisimples

$$\rho : \mathbb{Q}G \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A).$$

Notar que ρ no es necesariamente inyectiva en $\mathbb{Q}G$. Cada elemento $\alpha \in \mathbb{Q}G$ define una subvariedad abeliana

$$A^\alpha = \mathrm{Im}(m\rho(\alpha)) \subset A$$

donde m es un entero positivo tal que $m\alpha \in \mathrm{End}(A)$. Esta definición no depende del entero m escogido. Sea

$$\mathbb{Q}G = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_r$$

la descomposición de $\mathbb{Q}G$ como suma directa de $\mathbb{Q}G$-submódulos irreducibles Q_i de $\mathbb{Q}G$. Los sumandos Q_i corresponden canónicamente a representaciones racionales irreducibles ψ_i del grupo G. La descomposición correspondiente de $1 \in \mathbb{Q}G$, dada por

$$1 = e_1 + \cdots + e_r$$

con idempotentes centrales $e_i \in Q_i$, induce una isogenia (Teorema de Lange-Recillas)

$$A^{e_1} \times \cdots \times A^{e_r} \to A$$

dada por adición; esta es la *descomposición isotípica* de A. Esta descomposición es única módulo permutación ya que los idempotentes centrales e_i son únicamente determinados por $\mathbb{Q}G$. Notar que los componentes A^{e_i} son subtoros complejos G-estables de A con

$$\mathrm{Hom}_G(A^{e_i}, A^{e_j}) = 0$$

para $i \neq j$ (por lema de Schur).

Nos concentraremos en el caso donde G es tal que $\#\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}G = \#\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$. Existen familias de grupos que cumplen esta propiedad, por ejemplo, la familia de los grupos simétricos y la familia de los grupos de Weyl.

Bajo la hipótesis $\#\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}G = \#\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}G$, los idempotentes centrales son determinados de la siguiente forma: Sea χ_i el caracter del $\mathbb{Q}G$-módulo irreducible Q_i, entonces

$$e_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g$$

Demostraremos formalmente el resultado:

Proposición 4.1. *Bajo las notaciones anteriores, los elementos e_i son idempotentes centrales.*

Demostración. En clases se demostró que los elementos e_i son idempotentes, es decir, $e_i^2 = e_i$. Entonces solo demostraremos que los e_i son centrales, es decir, $e_i \in Z(\mathbb{Q}G)$. Fijemos un $i \in \{1, \ldots, r\}$ arbitrario y sea $h \in G$. Basta demostrar que $he_i = e_ih$. Se tiene que

$$he_i = h\left(\frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g\right) = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})hg$$

$$e_ih = \left(\frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{k \in G} \chi_i(k^{-1})k\right)h = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{k \in G} \chi_i(k^{-1})kh.$$

Notar que se tiene la igualdad de conjuntos $\{hg : g \in G\} = \{kh : k \in G\}$. Entonces, para cada $g \in G$, existe un único $k \in G$ tal que $hg = kh$. Esto implica que $g = h^{-1}kh$ y por tanto $g^{-1} = h^{-1}k^{-1}h$, es decir, g^{-1} es conjugado a k^{-1}. Como los caracteres son funciones de clase se tiene $\chi(g^{-1}) = \chi(k^{-1})$ y por tanto $\chi(g^{-1})hg = \chi(k^{-1})kh$. Como para cada $g \in G$ existe un único $k \in G$ tal que se cumple lo anterior, entonces

$$\frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})hg = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{k \in G} \chi_i(k^{-1})kh$$

es decir, $he_i = e_ih$. Ahora, sea $r = \sum_{h \in G} \alpha_h h$. Entonces

$$re_i = \left(\sum \alpha_h h\right) e_i = \sum \alpha_h he_i = \sum \alpha_h e_i h = e_i \left(\sum \alpha_h h\right) = e_i r.$$

□

5. Ejemplo

En esta sección vamos a usar los conceptos y resultados de las secciones anteriores para descomponer la variedad jacobiana de una superficie de Riemann que admite una acción del grupo S_3. Este es el objetivo final de este trabajo.

Considerar la siguiente acción del grupo $S_3 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, bab = a^2\rangle$ en la superficie de Riemann compacta X de género $g = 3$ (dibujar). Sea $\mathscr{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ una base del grupo de homología $H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^6$. Identificamos $\mathscr{B}$ con una $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^6$ y pongamos $\Gamma = H_1(X, \mathbb{Z})$, de modo que $\Gamma = \langle \mathscr{B} \rangle_{\mathbb{Z}}$ es un reticulado en $\mathbb{C}^3$. Sabemos que $\dim_{\mathbb{C}}\Omega^1(X) = g = 3$ y por tanto $\Omega^1(X)^* \simeq \mathbb{C}^3$. Entonces la variedad jacobiana

$$JX = \Omega^1(X)^*/\Phi_X(H_1(X, \mathbb{Z})) \simeq \mathbb{C}^3/\Gamma$$

es una variedad abeliana (toro complejo) de dimensión $g = 3$. Nuestro objetivo es descomponer la variedad jacobiana JX.

La acción (fiel) de S_3 en X induce una acción (fiel) de S_3 en JX. La acción de S_3 en JX induce un homomorfismo de $\mathbb{Q}S_3$-módulos semisimples

$$\rho : \mathbb{Q}S_3 \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(JX)$$

Como $\#\mathrm{Irr}_{\mathbb{Q}}S_3 = \#\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}S_3$ el $\mathbb{Q}S_3$-módulo regular se descompone en $\mathbb{Q}S_3$-submódulos irreducibles

$$\mathbb{Q}S_3 = Q_1 \oplus Q_2 \oplus Q_3^2$$

donde Q_1 es el módulo trivial, Q_2 es un módulo no trivial de dimensión 1 y Q_3 es un módulo de dimensión 2. La descomposición correspondiente a

$$1 = e_1 + e_2 + e_3$$

con idempotentes centrales $e_i \in Q_i$ $(i = 1, 2)$ y $e_3 \in Q_3^2$, induce una isogenia (Teorema de Lange-Recillas)

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \to JX$$

dada por adición, donde $A_i = A^{e_i} = \mathrm{Im}(\rho(e_i))$. Nuestro objetivo es encontrar explícitamente los A_i.

Sea χ_i el caracter irreducible del módulo Q_i, entonces los idempotentes centrales vienen dados por

$$e_i = \frac{\chi_i(1)}{|S_3|} \sum_{\sigma \in S_3} \chi_i(\sigma^{-1})\sigma.$$

La tabla de caracteres de S_3 es

σ	1	a, a^2	b, ab, a^2b
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

Usando esta información calculamos los idempotentes centrales

$$e_1 = \frac{1}{6}(1 + a + a^2 + b + ab + a^2b)$$

$$e_2 = \frac{1}{6}(1 + a + a^2 - b - ab - a^2b)$$

$$e_3 = \frac{2}{6}(2 \cdot 1 - a - a^2 + 0b + 0ab + 0a^2b)$$

Notar que $e_1 + e_2 + e_3 = 1$ y observar que hasta ahora solo hemos usado herramientas de álgebra. A continuación vamos a obtener una representación (racional) concreta de S_3 por medio de la geometría de la acción de S_3 en JX. La acción de a en los elementos de $\mathscr{B}$ es

$$\alpha_1 \mapsto \alpha_2 \ , \quad \alpha_2 \mapsto \alpha_3 \ , \quad \alpha_3 \mapsto \alpha_1$$

$$\beta_1 \mapsto \beta_2 \ , \quad \beta_2 \mapsto \beta_3 \ , \quad \beta_3 \mapsto \beta_1$$

y se extiende a un $\mathbb{Z}$-isomorfismo de Γ cuya matriz en la base $\mathscr{B}$ es

$$[a]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La acción de b en los elementos de $\mathscr{B}$ es

$$\alpha_1 \mapsto -\alpha_2 \ , \quad \alpha_2 \mapsto -\alpha_1 \ , \quad \alpha_3 \mapsto -\alpha_3$$

$$\beta_1 \mapsto -\beta_2 \ , \quad \beta_2 \mapsto -\beta_1 \ , \quad \beta_3 \mapsto -\beta_3$$

y se extiende a un $\mathbb{Z}$-isomorfismo de Γ cuya matriz en la base $\mathscr{B}$ es

$$[b]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observar que estas matrices satisfacen las relaciones del grupo S_3

$$[a]^3_{\mathscr{B}} = [b]^2_{\mathscr{B}} = I_6 \ , \quad [b]_{\mathscr{B}}[a]_{\mathscr{B}}[b]_{\mathscr{B}} = [a]^2_{\mathscr{B}}.$$

Como a y b generan el grupo S_3, multiplicando las matrices de a y b se obtienen las matrices de los otros elementos de S_3

$$[a^2]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad [ab]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[a^2b]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad [1]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_6$$

Entonces podemos definir

$$\rho_r : S_3 \to \mathrm{GL}(6, \mathbb{Z}), \ a \mapsto [a]_{\mathscr{B}}, \quad b \mapsto [b]_{\mathscr{B}}$$

y luego extendiendo linealmente se tiene una representación ρ_r de S_3 sobre $\mathbb{Q}$. Se puede extender ρ_r al álgebra de grupo

$$\rho_r : \mathbb{Q}S_3 \to \mathrm{M}(6, \mathbb{Q}), \ \sum \alpha_\sigma \sigma \mapsto \sum \alpha_\sigma \rho_r(\sigma)$$

Sea Γ_i el reticulado de A_i, entonces

$$A_i = (\mathrm{Im}\rho_r(e_i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})/\Gamma_i$$

y el reticulado $\Gamma_i = \mathrm{Im}\rho_r(e_i) \cap \Gamma$. Ahora podemos encontrar explícitamente los A_i.

Calculando $\rho_r(e_1) = [0]_{6\times 6}$, de modo que $\mathrm{Im}\rho_r(e_1) = \{0\}$ y por tanto $A_1 = \{0\}$.

Para e_2 se obtiene

$$\rho_r(e_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que $\mathrm{Im}\rho_r(e_2)$ es generado (sobre $\mathbb{Q}$) por

$$\{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3}, \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{3}\}.$$

Esto implica que $\Gamma_2 = \mathrm{Im}\rho_r(e_2) \cap \Gamma$ es generado (sobre $\mathbb{Z}$) por

$$\mathscr{B}_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3\}$$

y por tanto $A_2 = \langle \mathscr{B}_2 \rangle_{\mathbb{R}} / \langle \mathscr{B}_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ es una variedad abeliana de dimensión 1 (curva elíptica).

Para e_3 se obtiene

$$\rho_r(e_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

de modo que $\mathrm{Im}\rho_r(e_3)$ es generado (sobre $\mathbb{Q}$) por

$$\{\frac{2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}{3}, \frac{-\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3}{3}, \frac{2\beta_1-\beta_2-\beta_3}{3}, \frac{-\beta_1+2\beta_2-\beta_3}{3}\}.$$

Para obtener el reticulado Γ_3 de A_3 debemos obtener la intersección de $\mathrm{Im}\rho_r(e_3)$ con Γ. Poniendo $\epsilon_1 = \frac{2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}{3}$, $\epsilon_2 = \frac{-\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3}{3}$, $\delta_1 = \frac{2\beta_1-\beta_2-\beta_3}{3}$ y $\delta_2 = \frac{-\beta_1+2\beta_2-\beta_3}{3}$ se tienen las siguientes relaciones

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \epsilon_1 + 2\epsilon_2 = \alpha_2 - \alpha_3$$
$$\delta_1 - \delta_2 = \beta_1 - \beta_2, \quad \delta_1 + 2\delta_2 = \beta_2 - \beta_3.$$

como el conjunto

$$\mathscr{B}_3 = \{\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \beta_1 - \beta_2, \beta_2 - \beta_3\}$$

es $\mathbb{Q}$-linealmente independiente, entonces es otra $\mathbb{Q}$-base de $\mathrm{Im}\rho_r(e_3)$ y $\mathscr{B}_3$ es una $\mathbb{Z}$-base de Γ_3. Por tanto $A_3 = \langle\mathscr{B}_3\rangle_{\mathbb{R}}/\langle\mathscr{B}_3\rangle_{\mathbb{Z}}$ es una variedad abeliana de dimensión 2. Con esto obtenemos una descomposición de JX por medio de la isogenia

$$A_2 \times A_3 \to JX$$

dada por adición, cuyo núcleo (finito) es $\simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.

Ahora veremos que A_3 también se puede descomponer. Esto lo haremos sin usar la teoría de la sección 4 ("al ojo"). Observar que

$$\rho_r(a)(\alpha_1-\alpha_2) = \alpha_2-\alpha_3, \quad \rho_r(b)(\alpha_1-\alpha_2) = \alpha_1-\alpha_2$$
$$\rho_r(a)(\alpha_2-\alpha_3) = -((\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)), \quad \rho_r(b)(\alpha_2-\alpha_3) = -((\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3))$$

$$\rho_r(a)(\beta_1-\beta_2) = \beta_2-\beta_3, \quad \rho_r(b)(\beta_1-\beta_2) = \beta_1-\beta_2$$
$$\rho_r(a)(\beta_2-\beta_3) = -((\beta_1-\beta_2)+(\beta_2-\beta_3)), \quad \rho_r(b)(\beta_2-\beta_3) = -((\beta_1-\beta_2)+(\beta_2-\beta_3))$$

Entonces se tiene una descomposición $\mathrm{Im}\rho_r(e_3) = \langle\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3\rangle_{\mathbb{Q}} \oplus \langle\beta_1-\beta_2, \beta_2-\beta_3\rangle_{\mathbb{Q}}$ en $\mathbb{Q}S_3$-submódulos y una descomposición S_3-estable del reticulado $\Gamma_3 = \langle\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3\rangle_{\mathbb{Z}} \oplus \langle\beta_1-\beta_2, \beta_2-\beta_3\rangle_{\mathbb{Z}}$. Con esto obtenemos una descomposición de A_3 por medio del isomorfismo

$$B_1 \times B_2 \to A_3$$

dado por adición, donde $B_1 = \langle\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3\rangle_{\mathbb{R}}/\langle\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3\rangle_{\mathbb{Z}}$ y $B_2 = \langle\beta_1-\beta_2, \beta_2-\beta_3\rangle_{\mathbb{R}}/\langle\beta_1-\beta_2, \beta_2-\beta_3\rangle_{\mathbb{Z}}$ son variedades abelianas de dimensión 1 (curvas elípticas). Con esto obtenemos una descomposición de JX en un producto de curvas elípticas por medio de la isogenia

$$A_2 \times B_1 \times B_2 \to JX$$

dada por adición, cuyo núcleo (finito) es $\simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. Notar que $B_1 \simeq B_2$.

Referencias

[1] Ch. Birkenhake, H. Lange. *Complex abelian varieties.* Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 302. *Springer-Verlag, Berlin*, 2004. xii+635 pp. ISBN: 3-540-20488-1

[2] O. Debarre. *Complex tori and abelian varieties.* Translated from the 1999 French edition by Philippe Mazaud. SMF/AMS Texts and Monographs, 11. *American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris*, 2005. x+109 pp. ISBN: 0-8218-3165-8

[3] R. Hidalgo, R. Rodríguez. *Introducción a las variedades abelianas y grupos klenianos.* url: http://dme.ufro.cl/rhidalgo/files/varf4.pdf

[4] G. James, M. Liebeck. *Representations and Characters of Groups.* Second edition. Cambridge University Press (2001).

[5] R. Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces.* Graduate Studies in Mathematics, 5. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1995. xxii+390 pp. ISBN: 0-8218-0268-2

[6] R. Rodríguez. *Abelian varieties and group actions.* In: Riemann and Klein surfaces, automorphisms, symmetries and moduli spaces. Contemporary Mathematics 629 (2014), pp. 299-314.

[7] M. Román. *Weyl group actions on Jacobian varieties.* Tesis de Magister, Pontificia Universidad Católica de Chile (2016).

[8] JP. Serre. *Linear representations of finite groups.* Graduate Text in Mathematics, v.42, Spriger (1996).