TEOREMA DE INDUCCIÓN DE BRAUER

ALEX CG.

1. Introduction

En el teorema de inducción de Artin, establece que todo caracter racional de un grupo finito G, es una combinación $\mathbb{Q}$-lineal de caracteres inducidos por caracteres lineales de subgrupos cíclicos de G. Para muchos propositos, sin embargo, es importante conocer que todo caracter complejo de G es una combinación $\mathbb{Z}$-lineal de caracteres complejos de cierto tipo de subgrupos de G. El primer resultado significativo en esta dirección fue debido a Brauer [4], la que estable que esto es posible con una colección de subgrupos llamados *subgrupos elementales* de G, i.e. producto directo de un grupo cíclico y un p-grupo para algún primo p. Es claro que esta colección contiene a los subgrupos cíclicos de G.

Gran parte de los resultados establecidos aquí fueron sacados del texto de Curtis-Reiner (ver [1]), la cual se basa en una demostración más sencilla, dada por Brauer-Tate [2], la cual explota un poco la estructura del anillo de "caracteres generalizados", esto lo veremos en la Sección 3. Luego de probar el Teorema de Brauer, fácilmente deduciremos un par de teoremas que dan condiciones necesarias y suficiente para poder decir cuando una función de clases es un caracter generalizado, y cuando un caracter es irreducible. Finalmente daremos un pequeño ejemplo, tomando el grupo de simetrias S_3.

Nuestro Teorema principal (probado por Brauer en 1947 [4]), establece que.

Teorema 1 (Brauer 1947)**.** *Todo caracter complejo de G es una combinación $\mathbb{Z}$-lineal $\sum a_i\psi_i^G$, donde $a_i \in \mathbb{Z}$, y ψ_i^G son inducidos por caracteres lineales ψ_i de algún tipo de subgrupo de G, llamado subgrupo elemental.*

2. Preliminaries

Sea p un primo, y sea $a \in G$, se dice que a es *p-regular*, si su order no es divisible por p. Un elemento cuyo order es una potencia de p es llamado *p-singular*.

Definición 2. *Un grupo G se dice p-elemental (o elemental), si este es un producto directo $(a) \times B$ de un grupo cíclico (a) generado por un elemento p-regular $a \in G$, y un p-grupo $B \subset G$.*

Observación 3. *Todo elemento $a \in G$ es expresable como $a = a_1a_2$, donde a_1 y a_2 commuten, a_1 es p-regular, y a_2 es p-singular. Además los elementos a_1 y a_2 están unicamente determinados por a, y son llamados componentes p-regular y p-singular de a, respectivamente.*

Sea R un dominio incluido en $\mathbb{C}$. Si $\chi_1, \cdots, \chi_s$, son los caracteres de un conjunto total de $\mathbb{C}G$-módulos irreducibles no isomorfos (con $\chi_1(g) = 1$, $\forall g \in G$, *el caracter trivial*), definimos el *anillo de caracteres generalizados del grupo G con coeficientes en R*, por

$$X_R = X_R(G) = R\chi_1 \oplus \cdots \oplus R\chi_s,$$

note que podemos considerar R como subanillo de X_R. Durante todo el trabajo, se tomará $R = \mathbb{Z}[\epsilon]$ (anillo de enteros algebraicos del cuerpo $\mathbb{Q}(\epsilon)$), donde $\epsilon \in \mathbb{C}$ una raíz $(G : 1)$-ésima primitiva de 1.

Si χ es un caracter de G y H es un subgrupo de G, entonces la restricción $\chi|_H$ de la función χ al subgrupo H es un caracter de H. El *mapeo restricción* $\chi \mapsto \chi|_H$ define un homomorfismo de anillos de $X_R(G)$ hacia $X_R(H)$. Ahora vamos en la dirección opuesta, dado un caracter ψ del subgrupo H, podemos hacer corresponder a ψ el llamado *caracter inducido* ψ^G de G, por

$$\psi^G(x) = \frac{1}{(H:1)} \sum_{t \in G} \psi_0(t^{-1}xt), \quad x \in G,$$

donde ψ_0 denota la extensión de ψ a G estableciendo $\psi_0(y) = 0$, para $y \notin H$. El mapeo inducción $\psi \mapsto \psi^G$ define un homomorfismo de grupos abelianos de $X_R(H)$ hacia $X_R(G)$.

Recordemos también el *Teorema de Recíprocidad de Frobenius*: Si χ es un caracter irreducible de G y ψ es un caracter irreducible de H, entonces la multiplicidad de ψ en $\chi|_H$ es igual a la multiplicidad de χ en ψ^G, es decir

$$(\psi, \chi|_H) = (\psi^G, \chi). \tag{1}$$

3. $V_R \subseteq X_R \subseteq U_R$

Definamos los siguientes R-módulos $V_R = V_R(G)$ y $U_R = U_R(G)$:

$$U_R = \left\{ \chi \in \mathrm{cf}(G) : \ \chi|_H \in X_R(H), \text{ para todo subgrupo } p\text{-elemental } H \text{ de } G \right\}^1,$$

y V_R el conjunto de todas las combinaciones lineales con coeficientes en R de caracteres ψ^G inducidos por caracteres ψ de subgrupos elementales de G en p primo que divide a $(G:1)$.

Sea $\{H_i : \ 1 \leq i \leq e\}$ la familia de todos los subgrupos p-elementales de G para todos los primos p dividiendo a $(G:1)$. Ya que todos subgrupo cíclico de G es un subgrupo p-elemental de G para cada p, todo elemento de G está en algún H_i. Sea $\{\psi_{ij} : \ 1 \leq j \leq s_i\}$ será un conjunto total de caracteres irreducibles de H_i sobre $\mathbb{C}$. Así el módulo V_R, consiste de las combinaciones lineales de ψ_{ij}^G con coeficientes en R,

$$V_R = \sum_{i,\,j} R\psi_{ij}^G = \sum_{i,\,j} (R\psi_{ij})^G = \sum_i \left\{X_R(H_i)\right\}^G.$$

Por otro lado aplicando (1) para $\psi = \psi_{ij}$, y $H = H_i$, vemos a la vez que

$$\chi \in U_R \iff (\psi_{ij}^G, \chi) \in R, \text{ para todo } i, j. \tag{2}$$

Un resultado básico debido a Frobenius relaciona el proceso de inducción y formación de producto, como se sigue.

Lema 4. *Sea H un subgrupo de G, μ un caracter para H y ν un caracter para G. Entonces $\mu^G \cdot \nu = \{\mu \cdot (\nu|H)\}^G$.*

Proof. Ver Teorema (38.5) de [1]. □

Lema 5. *U_R es un anillo, V_R es un ideal en U_R, además $V_R \subseteq X_R \subseteq U_R$.*

Proof. Es claro que de la definición de U_R que U_R es cerrado bajo sustracción y multiplicación y por tanto es un anillo. Cada caracter de G pertenece a U_R, así $X_R \subseteq U_R$. Ya que cada caracter ψ_{ij}^G pertenece a X_R, tenemos que $V_R \subseteq X_R$. Con el fin de mostrar que V_R es ideal de U_R, sólo tenemos que mostrar que $\psi_{ij}^G \cdot \chi \in V_R$, para cada $\chi \in U_R$ y cada i, j. Pero entonces $\chi|_{H_i} \in X_R(H_i)$ y por tanto, por Lema 4,

$$\psi_{ij}^G \cdot \chi = \{\psi_{ij} \cdot (\chi|_{H_i})\}^G \in \{X_R(H_i)\}^G \subseteq V_R.$$

[1] $\mathrm{cf}(G)$ denota el espacio de funciones de clases de G.

□

Observación 6. *En subanillo $R = \mathbb{Z}[\epsilon]$ de $\mathbb{C}$, es conocido que este tiene una $\mathbb{Z}$-base $\{\beta_1 = 1, \beta_2 = \epsilon, \cdots, \beta_u = \epsilon^{u-1}\}$, donde $u = deg(f)$, es el grado del polinomio irreducible $f \in \mathbb{Q}[x]$, tal que $f(\epsilon) = 0$.*

La ventaja del anillo R, respecto al anillo $\mathbb{Z}$ es que todos los caracteres de G tiene valores en R, ya que estos valores son suma de $(G:1)$-ésimas raíces de la unidad.

Lema 7. *Si el caracter trivial $\chi_1 \in V_R$, entonces $U_{\mathbb{Z}} = X_{\mathbb{Z}} = V_{\mathbb{Z}}$.*

Proof. Ya que $\chi_1 \in V_R$, entonces

$$\chi_1 = \sum_i r_i \alpha_i, \quad r_i \in R,\, \alpha_i \in V_{\mathbb{Z}}.$$

Por la Observación 6, podemos re-escribir χ_1 como

$$\chi_1 = \sum_{j=1}^{u} \beta_j \mu_j, \quad \mu_j \in V_{\mathbb{Z}},$$

ahora como $V_{\mathbb{Z}} \subseteq X_{\mathbb{Z}}$, entonces cada μ_j, la podemos escribir como

$$\mu_j = \sum_{\ell=1}^{s} a_{j\ell} \chi_\ell, \quad a_{j\ell} \in \mathbb{Z},\ 1 \le j \le u,$$

así

$$\chi_1 = \sum_{j,\ell} \beta_j a_{j\ell} \chi_\ell.$$

Como $\{\chi_\ell\}$ son linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$, tenemos

$$\sum_j \beta_j a_{j\ell} = \delta_{1\ell}, \quad 1 \le \ell \le s.$$

La idependencia lineal de $\{\beta_j\}$ sobre $\mathbb{Z}$, implica $a_{11} = 1$, $a_{21} = \cdots = a_{u1} = 0$, y $a_{j\ell} = 0$, para $1 \le j \le u$, $2 \le \ell \le s$. Por tanto,

$$\mu_1 = \sum_{\ell=1}^{s} a_{1\ell} \chi_\ell = \chi_1,$$

la cual muestra $\chi_1 = \mu_1 \in V_{\mathbb{Z}}$. Pero χ_1 es el elemento unidad del anillo $X_{\mathbb{Z}}$, y, ya que $V_{\mathbb{Z}}$ es un ideal de este anillo, por Lema 5, podemos concluir que $U_{\mathbb{Z}} = X_Z = V_{\mathbb{Z}}$. □

Notemos que el Lema 7, nos dice que si probamos que $\chi_1 \in V_R$, entonces todo caracter complejo de G será una combinación $\mathbb{Z}$-lineal de caracteres inducidos de caracteres irreducibles (*no necesariamente lineales*) de subgrupos elementales de G, así tenemos probado *casí* el Teorema de Brauer (Teorema 1), sin embargo, el siguiente resultado nos dice que todo caracter irreducible de un subgrupo p-elemental H de G es inducido por algún caracter lineal de algún subgrupo p-elemental de H.

Lema 8. *Sea p un primo, y sea $H = (a) \times B$ el producto directo de un grupo cíclico (a), cuyo orden es primo relativo a p, y un p-grupo B. Sea θ el caracter de un KH-módulo irreducible. Entonces existe un subgrupo $B_0 \subseteq B$ y un caracter lineal ϕ_0 de $(a) \times B_0$ tal que, $\theta = \phi_0^H$.*

Proof. Ver Teorema (38.13) de [1]. □

Así usando el Lema 8, (también el Lema 10 enunciado en la sección siguiente), concluimos el resultado del Teorema 1.

Observación 9. *Note que si G es un grupo p-elemental, el Teorema de Brauer se cumple trivialmente, pues dado χ un caracter de G, y tomando $H = G$ (como subgrupo p-elemental de si mismo), se tiene que $\chi = \chi^G$. Por ejemplo $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (Klein), Q_8 (Quaternion), $\mathbb{Z}_p \times D_8$, $\mathbb{Z}_p \times Q_8$ ($p \neq 2$, primo), son todos p-elementales, por tanto en cada uno de estos se satisface el Teorema de Brauer fácilmente.*

4. Proof that $\chi_1 \in V_R(G)$

Con el fin de completar la demostración del Teorema de Brauer, en esta sección mostraremos que $\chi_1 \in V_R$, para esto consideramos una serie de lemas que apunta a mostrar lo que queremos,

Lema 10 (Transitividad del mapeo inducción)**.** *Sean $E \subset H \subset G$ grupos, y sea μ un caracter de E. Entonces $(\mu^H)^G = \mu^G$.*

Proof. Ver Teorema (38.4) de [1]. □

Lema 11. *Sea $H = A \times B$ un subgrupo de G, donde A es abeliano y donde $(A:1)$ y $(B:1)$ son primos relativos. Supongamos que $H \subset H_i$ para algún subgrupo elemental H_i. Entonces para cada $a \in A$, existe $\phi = \phi_a \in V_R$ tal que,*

1. *$\phi(g) \in \mathbb{Z}$, para todo $g \in G$.*
2. *$\phi(g) = 0$ si g no es conjugado en G a un elemento de aB.*
3. *$\phi(a) = (C_G(a) : B)$, donde $C_G(a)$ denota el centralizador de a (Claramente $B \subset C_G(a)$).*

Proof. Vamos a establecer $\phi = \psi^G$, para un adecuado $\psi \in X_R(H)$. Ya que $\psi^G = (\psi^{H_i})^G$ por el Lema 10, y como $\psi^{H_i} \in X_R(H_i)$, se sigue que $\phi = (\psi)^G \in \{X_R(H_i)\}^G \subset V_R$.

Ahora procedemos a construir ψ: Ya que A es abeliano, tenemos $(A:1)$ caracteres 1-dimensionales distintos de la forma $\lambda_i : A : \to \mathbb{C}$, y estás nos dan todas las representaciones irreducible de A en $\mathbb{C}$. Ahora extendemos λ_i a un mapeo $\omega_i : H \to \mathbb{C}$ por, $\omega_i(xy) = \lambda_i(x)$, $x \in A$ e $y \in B$. Entonces ω_i es una representación 1-dimensional de H en $\mathbb{C}$, y así ciertamente $\omega_i \in X_{\mathbb{Z}}(H)$.

Fijamos un elemento $a \in A$, entonces $\omega_i(a) \in R$, así podemos definir

$$\psi = \sum_i \overline{\omega_i(a)}\omega_i \in X_R(H),$$

donde $\overline{\omega_i(a)}$ denota el conjugado complejo de $\omega_i(a)$. Para $x \in A$, $y \in B$, tenemos por relaciones de ortogonalidad para los caracteres de A,

$$\begin{aligned} \psi(xy) &= \sum_i \overline{\omega_i(a)}\omega_i(xy) \\ &= \sum_i \overline{\lambda_i(a)}\lambda_i(x) = \begin{cases} (A:1) & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a. \end{cases} \end{aligned}$$

Por definición,

$$\psi^G(g) = \frac{1}{(H:1)} \sum_{t \in G} \psi_0(t^{-1}gt), \quad g \in G.$$

Ahora $\psi_0(t^{-1}gt) = 0$ a menos que $t^{-1}gt \in H$. Además, si $t^{-1}gt = xy \in H$, donde $x \in A$ e $y \in B$, entonces todavía tenemos que $\psi_0(t^{-1}gt) = 0$ a menos que $x = a$; en caso que $x = a$, entonces $\psi_0(t^{-1}gt) = (A:1)$. Por lo tanto $\psi^G(g) \neq 0$ implica

$$\psi^G(g) = \frac{1}{(H:1)} \sum_{t \in T} (A:1) = \frac{(A:1)(T:1)}{(H:1)} = \frac{(T:1)}{(B:1)},$$

donde $T = \{t \in G : t^{-1}gt = ay$, para algún $y \in B\}$. Claramente si $t \in T$, entonces $tb \in T$, para cada $b \in B$, por tanto $(T : 1)$ es un multiplo de $(B : 1)$. Luego $\psi^G(g) \in \mathbb{Z}$, para cada $g \in G$, así se cumple (1) y (2).

Por otro lado, sabemos que $\phi(a) = \psi^G(a) = (B : 1)^{-1}(T : 1)$, y $t \in T$ si y sólo si $t^{-1}at = ab$ para algún $b \in B$. Pero entonces

$$1 = t^{-1}a^{(A:1)}t = a^{(A:1)}B^{(A:1)} = b^{(A:1)}.$$

Como $(A : 1)$ y $(B : 1)$ son primos relativos, entonces $y = 1$, por tanto $t^{-1}at = a$, es decir $t \in C_G(a)$. Así $T = C_G(a)$, y

$$\phi(a) = (B : 1)^{-1}(C_G(a) : 1) = (C_G(a) : B).$$

□

Una clase de conjugación de G se dice *p-regular*, si todos sus elementos son p-regulares.

Lema 12. *Sea p primo. Entonces existe $\theta \in V_R$, tal que*
(1) *$\theta(g) \in \mathbb{Z}$, para todo $g \in G$.*
(2) *$\theta(g) \equiv 1(mod\ p)$, para todo $g \in G$.*

Proof. Sea $\{a_1, \cdots, a_n\}$ un conjunto total de representantes de clases de conjugación p-regular $C_1, \cdots, C_n$ de G. Para cada a_i encontraremos un elemento $\eta_i \in V_R$ tal que
(i) $\eta_i(g) \in \mathbb{Z}$, para todo $g \in G$,
(ii) $\eta_i(g) = 0$ si la componente p-regular de g no está en C_i.
(iii) $\eta_i(g) \equiv 1(\text{mod } p)$ si la componente p-regular de g está en C_i.

Entonces, establecemos

$$\theta = \eta_1 + \cdots + \eta_n,$$

para la cual se cumple que $\theta(g) \in \mathbb{Z}$ para todo $g \in G$. Además, para un elemento $g \in G$, su componente p-regular deberá estar en exactamente una clase C_i $(1 \leq i \leq n)$, así que

$$\theta(g) \equiv \eta_i(g) \equiv 1(\text{mod } p).$$

Ahora procedemos a la construcción de η_i (denotamos η_i por η por conveniencia): Sea a un elemento de la clase p-regular C, y sea $A = (a)$ el grupo cíclico generado por a. Si B es cualquier subgrupo p-Sylow de $C_G(a)$, entonces $H = A \times B$ es un subgrupo p-elemental, así satisface la hipótesis de Lema 11, podemos construir $\phi_a \in V_R$ tal que, $\phi_a(g) \in \mathbb{Z}$ para todo $g \in G$, $\phi_a(g) = 0$ si ningún conjugado de g está en aB, y $\phi_a(a) = [C_G(a) : B] \not\equiv 0(\text{mod } p)$ (ya que B es un p-Sylow). Así podemos escoger $m_a \in \mathbb{Z}$, tal que $m_a\phi_a(a) \equiv 1(\text{mod } p)$, y establecemos $\eta_a = m_a\phi_a \in V_R$, la cual satisface la condición (i).

Con el fin de verificar la condición (ii), sea $g = g_1g_2$ donde g_1 y g_2 son las componentes p-regular y p-singular de g, respectivamente. Si $g_1 \notin C$, mostraremos que ningún conjugado de g está en aB. Supongamos lo contrario, $t^{-1}gt = ab$, $b \in B$, entonces $g = (tat^{-1})(tbt^{-1})$ nos da una descomposición de g en un elemento p-regular tat^{-1} y un elemento p-singular tbt^{-1}, donde tat^{-1} conmuta con tbt^{-1}, debido a la unicidad de la descomposición en sus componenetes regular y singular (Observación 3), tenemos $g_1 = tat^{-1}$, contradicción ya que $tat^{-1} \in C$. Así ningún conjugado de g está en aB, y por la propiedad (2) del Lema 11 tenemos que $\eta_a(g) = 0$ si la componente p-regular de g no está en C.

Finalmente verificamos la condición (iii), sea $g = g_1g_2$, donde g_1 y g_2 son las componentes p-regular y p-singular de g, respectivamente, además supongamos que $g_1 \in C$. Tenemos que

$$\eta_a(g_1) = \eta_a(a) \equiv 1(\text{mod } p),$$

así para probar (iii), bastará con mostrar que $\eta_a(g) \equiv \eta_a(g_1)(\text{mod } p)$.

Como $\eta_a \in V_R \subseteq X_R$, por tanto $\widetilde{\eta} := \eta_a|(g)$ (restricción de η_a al subgrupo cíclico $J = (g)$) pertenece a $X_R(J)$. Sea $\{\mu_i\}$ un conjunto total de caracteres irreducibles de J, entonces podemos escribir

$$\widetilde{\eta} = \sum_i \alpha_i \mu_i, \quad \alpha_i \in R,$$

y $\eta_a(g) = \widetilde{\eta}(g)$, $\eta_a(g_1) = \widetilde{\eta}(g_1)$. Sea p^d el order de g_2, entonces

$$\begin{aligned} \eta_a(g) = \widetilde{\eta}(g) &\equiv \{\widetilde{\eta}(g)\}^{p^d} \equiv \sum_i \alpha_i^{p^d} \mu_i(g^{p^d}) \\ &\equiv \sum_i \alpha_i^{p^d} \mu_i(g_1^{p^d}) \equiv \{\widetilde{\eta}(g_1)\}^{p^d} \equiv \widetilde{\eta}(g_1) = \eta_a(g_1)(\text{mod } pR), \end{aligned}$$

por el pequeño teorema de Fermat. Ya que R tiene una $\mathbb{Z}$-base, tenemos que $pR \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Por tanto dos elementos de $\mathbb{Z}$ la cual son congruentes (mod pR) son de hecho congruente (mod p). □

Lema 13. *Si para cada $p|(G:1)$, establecemos $(G:1) = p^\ell t_p$, donde $p \nmid t_p$, entonces $t_p\chi_1 \in V_R$.*

Proof. Por Lema 12, existe $\theta \in V_R$ tal que, $\theta(g) \in \mathbb{Z}$, $\theta(g) \equiv 1(\text{mod } p)$ para todo $g \in G$. Entonces

$$\{\theta(g)\}^{p^\ell} \equiv 1(\text{mod } p^\ell), \quad g \in G.$$

Estableciendo $\psi := t_p(\theta^{p^\ell} - \chi_1) \in X_R$, tenemos

$$\psi(g) = t_p(\{\theta(g)\}^{p^\ell} - \chi_1(g)) \equiv 0(\text{mod } (G:1)),$$

ya que $\chi_1(g) = 1$.

Demostraremos que $\psi \in V_R$. De cada una de las clases de conjugación $C_1, \cdots, C_s$ escogemos un elemento, digamos a_i de C_i. Entonces $(a_i) \times (1)$ es un grupo del tipo dado en el Lema 11, así podemos escoger $\phi_i \in V_R$ tal que $\phi_i(g) \in \mathbb{Z}$ para todo $g \in G$, $\phi_i(g) = 0$ si $g \notin C_i$, y $\phi_i(a_i) = (C_G(a_i):1)$.

Ahora definamos λ, por

$$\psi(g) = (G:1)\lambda(g), \quad g \in G.$$

Entonces tenemos $\lambda(a_i) \in \mathbb{Z}$ para todo a_i, $1 \leq i \leq s$ y

$$\psi(g) = \sum_{i=1}^{s} \lambda(a_i) \frac{(G:1)}{(C_G(a_i):1)} \phi_i(g), \quad g \in G,$$

ya que $\phi_i(g) = 0$ salvo cuando $g \in C_i$, y en ese caso sabemos que $\phi_i(g) = (C_G(a_i):1)$. Además note que los coeficientes de la última expresión de $\psi(g)$, están en $\mathbb{Z}$, y por tanto es una combinación $\mathbb{Z}$-lineal de $\phi_1, \cdots, \phi_i$. Por lo tanto $\psi \in V_R$, esto es

$$t_p(\theta^{p^\ell} - \chi_1) \in V_R.$$

Por otro lado, ya que $\theta^{p^\ell} \in V_R$ entonces $t_p\theta^{p^\ell} \in V_R$, así se concluye que $t_p\chi_1 \in V_R$. □

Lema 14. $\chi_1 \in V_R(G)$.

Proof. Por el Lema 13, sabemos que para cada elemento del conjunto

$$A = \{t_p : \ (G:1) = p^\ell t_p, \text{ con } p \nmid t_p\},$$

tenemos que $t_p\chi_1 \in V_R(G)$, y como A forma un conjunto finito de enteros primos relativos, podemos concluir que $\chi_1 \in V_R(G)$. □

5. Some consecuences and an example

En [3], fue mostrado que el Teorema 1 es equivalente al siguiente resultado, esto ahora ya es claro a partir del los Lemas 14 y 7.

Teorema 15 (Brauer 1953)**.** *Una función con valor complejo θ definida en un grupo finito G pertenece al anillo $X_{\mathbb{Z}}(G)$ si y sólo si, las siguientes dos condiciones se satisfacen:*

(1) $\theta \in cf(G)$.
(2) *Para cada subgrupo elemental H de G, la restricción $\theta|_H \in X_{\mathbb{Z}}(H)$.*

Proof. Del Lema 7 se tiene que $X_{\mathbb{Z}} = U_{\mathbb{Z}}$, y por definición de $U_{\mathbb{Z}}$, el Teorema se sigue. □

Notemos que el Teorema 15, nos da un criterio para cuando función de clase será un caracter generalizado. También como consecuencia del Teorema 15 podemos establecer un criterio para cuando una función de clase es un caracter irreducible.

Teorema 16 (Criterio de Irreducibilidad)**.** *Sea $\theta \in cf(G)$. Entonces θ es un caracter irreducible en G si y sólo si se satisfacen las siguientes tres condiciones*

(i) $\theta|_{H_i} \in X_{\mathbb{Z}}(H_i)$ *para cada subgrupo elemental $H_i \subset G$.*
(ii) $(\theta, \theta) = 1$.
(iii) $\theta(1) > 0$.

Proof. La condición necesaria claramente se cumple. Veamos la condición suficiente, supongamos que $\theta \in cf(G)$ cumple las condiciones (i), (ii), (iii). Por (i), implica que $\theta \in X_{\mathbb{Z}}(G)$ (por el Teorema 15), así

$$\theta = \sum_i a_i \chi_i, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Entonces $1 = (\theta, \theta) = \sum_i a_i^2 (\chi_i, \chi_i) = \sum_i a_i^2$, esto por (ii), luego existe j, tal que $a_j = \pm 1$ y $a_i = 0$, para todo $i \neq j$, por lo tanto $\theta = \pm \chi_j$, y por (iii), se tiene que $\theta = \chi_j$ la cual es irreducible. □

Ahora nos disponemos a dar un ejemplo, consideremos el grupo de simetrias $G = S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, es claro que este no es un grupo 2-elemental ni 3-elemental. Pero si tiene subgrupos propios 2-elementales:

$$H_1 = \{1, (12)\}, \quad H_2 = \{1, (13)\}, \quad H_3 = \{1, (23)\},$$

y un subgrupo propio 3-elemental:

$$H_4 = \{1, (123), (132)\}.$$

Nuestro objetivo es escribir los caracteres irreducibles de S_3, como combinación lineal *entera*, de caracteres inducidos de los subgrupos p-elementales ($p = 2, 3$), H_i de S_3.

Conocemos la tabla de caracteres de S_3, dada por

Table 1. Caracteres de S_3

	1	$b = (12)$	$a = (123)$
χ_0	1	1	1
χ_1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1

Por otro lado, también conocemos las tablas de caracteres de $\mathbb{Z}_3 \cong H_4$ y $\mathbb{Z}_2 \cong H_i$ ($i = 1, 2, 3$), dadas por

Table 2. $\mathbb{Z}_3 = (y)$, $\omega = e^{2\pi i/3}$

	1	y	y^2
ϕ_0	1	1	1
ϕ_1	1	ω	ω^2
ϕ_2	1	ω^2	ω

Table 3. $\mathbb{Z}_2 = (x)$

	1	x
ψ_0	1	1
ψ_1	1	-1

De ahora en adelante, dado un subgrupo H de G y χ un caractere de H, denoteremos el caracter inducido de χ sobre H, como $\mathrm{Ind}_H^G\chi$.

En H_i $(i = 1, 2, 3)$, inducimos los caracteres ψ_0, ψ_1, obtenemos

$$\mathrm{Ind}_{H_1}^G\psi_0(g) = \begin{cases} 3 & , g = 1 \\ 1 & , g \in \{(12), (13), (23)\} \\ 0 & , g \in \{(123), (132)\}. \end{cases}$$

Comparando esto con lo que tenemos en la Table 1, tenemos que

$$\mathrm{Ind}_{H_1}^G\psi_0 = \chi_0 + \chi_2,$$

también es fácil ver que los inducidos $\mathrm{Ind}_{H_i}^G\psi_0$ son todos iguales, para $i = 1, 2, 3$. Por otro lado, obtenemos

$$\mathrm{Ind}_{H_1}^G\psi_1(g) = \begin{cases} 3 & , g = 1 \\ -1 & , g \in \{(12), (13), (23)\} \\ 0 & , g \in \{(123), (132)\}, \end{cases}$$

de la cual comparando con la Table 1, tenemos que

$$\mathrm{Ind}_{H_1}^G\psi_1 = \chi_1 + \chi_2,$$

también es fácil ver que, $\mathrm{Ind}_{H_i}^G\psi_1$ son todos iguales, para $i = 1, 2, 3$.

Ahora para H_4, inducimos los caracteres ϕ_i, la cual comparando con la Table 1, obtenemos

$$\mathrm{Ind}_{H_4}^G\phi_0(g) = \begin{cases} 2 & , g = 1 \\ 0 & , g \in \{(12), (13), (23)\} \\ 2 & , g \in \{(123), (132)\} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ind}_{H_4}^G\phi_0 = \chi_0 + \chi_1.$$

Para $j = 1, 2$,

$$\mathrm{Ind}_{H_4}^G\phi_j(g) = \begin{cases} 2 & , g = 1 \\ 0 & , g \in \{(12), (13), (23)\} \\ -1 & , g \in \{(123), (132)\} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ind}_{H_4}^G\phi_j = \chi_2.$$

De todo esto, podemos deducir fácilmente que,

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \mathrm{Ind}_{H_1}^G\psi_0 + (-1)\mathrm{Ind}_{H_4}^G\phi_1, \\ \chi_1 &= \mathrm{Ind}_{H_1}^G\psi_1 + (-1)\mathrm{Ind}_{H_4}^G\phi_1 = \mathrm{Ind}_{H_4}^G\phi_0 + (-1)\mathrm{Ind}_{H_1}^G\psi_0 + \mathrm{Ind}_{H_4}^G\phi_1, \\ \chi_2 &= \mathrm{Ind}_{H_4}^G\phi_1, \end{aligned}$$

note que estás expresiones como combinación lineal entera, no necesariamente es única.

References

[1] Curtis, C., Reiner, R., *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Interscience Publishers, New York, 1962.

[2] Brauer, R., Tate, J., *On the characters of finite groups*. Ann. of Math. 61 (1955), 1-7.

[3] Brauer, R., *A characterization of the characters of groups of finite order*. Ann. of Math. 57 (1953), 357-377.

[4] Brauer, R., *On Artin's L-series with general group characters*. Ann. of Math., 48 (1947), 502-514.