Algebra y Geometría II
Vectores.

---

1. Sean $v_1 = (3, -2, 0, -1, 0)$, $v_2 = (1, 1, -2, -1, 1)$, $v_3 = (2, 1, 5, -1, \sqrt{2})$, $v_4 = (-3, 0, 1, -1, 1)$, $v_5 = (-5, -1, 5, -1, 0)$, $v_6 = (1, 1, 0, -1, -1)$, $v_7 = (0, 0, 0, 7, 6)$, $v_8 = (6, 2, -4, 0, 3)$, $v_9 = (3, 1, 0, -1, 0)$ vectores en $\mathbb{R}^5$. Determine:

   (a) $\sum_{i=1}^{9} i^2 v_i$ (b) $\sum_{i=1}^{8}(v_i \cdot v_{i+1})$ (c)$\sum_{i=1}^{9} ||v_i||$

   (d) $\sum_{i=1}^{9} ||v_i||^2$ (e) $\sum_{i=1}^{9} ||v_i||^2 v_i$ (f) $\sum_{i=1}^{8} ||v_i - v_{i+1}||$

   (g) $\sum_{i=1}^{8} ||v_i - v_{i+1}||\ v_i$ (h) $\sum_{i=1}^{8} ||v_i - v_{i+1}||^2$ (i) $\sum_{i=1}^{8} ||v_i - v_{i+1}||(v_i \cdot v_{i+1})$

   (j) $\sum_{i=1}^{8} ||v_i||^2(v_i \cdot v_{i+1})$ (k) $\sum_{i=1}^{9}(\sum_{j=1}^{i} ||v_j||^2)||v_i||$

2. Encuentre un vector unitario en la direccin del vector dado:
   - $(-30, 40)$
   - $(-6, 4, -3)$
   - $(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, 1)$
   - $(\frac{8}{3}, 2)$
3. Encuentre la distancia entre $(10, -3)$ y $(-1, -5)$
4. Diga si la afirmacin siguiente es falsa o verdadera:
   - Para cualquier escalar λ, $u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v)$
   - $u \cdot v - v \cdot u = 0$
   - Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y los vectores $v_1, \ldots, v_n \in W$ linealmente independientes. Si x es ortogonal a v_i para todo $1 \leq i \leq n$ entonces x es ortogonal a W.
5. Sea $v = (v_1, v_2, v_3)$. Demuestre que $v \cdot v \geq 0$. Cuando es $v \cdot v = 0$?
6. Verifique la *Ley del paralelógramo* para dos vectores u y v en $\mathbb{R}^n$.
7. Sea $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Describa el conjunto H de vectores (x, y) que son ortogonales a v. (No olvide el caso $v = 0$.)
8. Suponga que un vector x es ortogonal a los vectores u y v. Demuestre que x es ortogonal a $u + v$.
9. Sea $u = (5, 4, 3)$. Demuestre que el conjunto de todos los vectores ortogonales a u es un espacio vectorial.
10. Suponga que y es ortogonal a u y a v. Demuestre que y es ortogonal a todo el espacio generado por u y v: $\langle u, v \rangle$.
11. Sea $W = \langle v_1, \ldots, v_p \rangle$. Demuestre que si x es ortogonal a todo v_j entonces x es ortogonal a W.
12. Demuestre que $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.
13. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

14. Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Demuestre que
$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$
En qué casos hay igualdad?
15. Si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, cual es el máximo valor posible de $x + 2y + 3z$?
16. Utilice Cauchy-Schwarz para demostrar que si a, b, c son reales positivos, entonces
$$abc(a + b + c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$
17. Utilice Cauchy-Schwarz para encontrar el máximo de la función $a\text{sen}(\theta) + b\cos(\theta)$. Diga en qué ángulo se alcanza ese máximo.
18. Pruebe que
$$(\sum_{i=1}^n a_ib_ic_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)(\sum_{i=1}^n c_i^2)$$
19. Si un triángulo tiene dos lados de longitud igual a 6, cuales son los posibles largos del tercer lado?
20. Si un triángulo tiene un lado de longitud igual a 9 y otro de longitud igual a 15, cuales son los posibles largos del tercer lado?
21. Si los tres lados de un triángulo están dados por $x+2$, $2x+7$ y $4x+1$, y esos tres números son enteros, cual es el valor más grande posible de x?
22. Se dan 5 palitos de largos $1, 3, 5, 9, 10$. Cuántos triángulos distintos se pueden formar con tres de los cinco palitos?
23. Estudie todas las demostraciones de los teoremas y proposiciones vistos en clases.