



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemática

Numerabilidad

Cálculo I
Otoño 2018

Lista de algunos teoremas, demuéstralos cuando puedas c:

- La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.
- Si A es numerable y $B \subseteq A$, entonces B es numerable.
- Si A es infinito y $A \subseteq B$, entonces B es infinito.
- Si Y es un conjunto numerable, y existe una función $f : X \rightarrow Y$ inyectiva, entonces X es numerable.
- Si X es un conjunto numerable, y existe una función $f : X \rightarrow Y$ sobreyectiva, entonces Y es numerable.

Problema 1: Demuestre que los siguientes conjuntos son infinitos numerables:

- $A = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$
- $B = \left\{ \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{\sqrt{2}\}$
- $C = \{(m, n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} : (m + n) \in \mathbb{Z}\}$
- $D = \{\dots, -9, -4, -1, 1, 4, 9, \dots\}$

Problema 2: Demuestre que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es numerable

Problema 3: Consideremos los conjuntos infinitos $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{10}, Y$. Se sabe que existen funciones inyectivas $f_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ (con $i = 1, 2, \dots, 9$) y la función sobreyectiva $g : X_1 \rightarrow Y$. Demuestre que :

- Si X_{10} es numerable, entonces Y es numerable.
- Si X_{10} es numerable, entonces existe una función biyectiva $h : X_5 \rightarrow Y$

Problema 4: Sea A un conjunto y $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ una función sobreyectiva. Pruebe que si $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^{-1}\{n\}$ es numerable, entonces A es numerable.

Problema 5: Se define O_n como $\mathbb{N} - I_n$, es decir, $\{k \in \mathbb{N} : k > n\}$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que :

- $O_{n+1} \subseteq O_n$
- O_n es infinito