Cálculo en Varias Variables

Gonzalo Robledo

Índice general

Introducción

Este apunte comenzó a ser redactado para apoyar la docencia del curso de Matemáticas III el año 2012 y también ha sido usado y ampliado sistemáticamente en los cursos de *Cálculo en Varias Variables* realizados tanto para las licenciaturas de Matemáticas y Física (2013, 2014, 2016) y para la licenciatura en Ciencias Exactas (2015).

Como todo trabajo redactado en medio de la práctica docente, este texto no está totalmente editado. Espero que los lectores ayuden a perfeccionarlo con sus comentarios, sugerencias y listas de errores.

Agradecimientos

- A Claudio Bravo y José Aburto (ambos ayudantes del curso en años anteriores), quienes aportaron interesantes ejercicios y críticas constructivas, sacrificando tiempo de por si escaso,
- A mi colega Sergio Muñoz por sus consejos y sugerencias.

.

Capítulo 1

Normas

Las propiedades algebraicas del conjunto $\mathbb{R}^n$ han sido estudiadas en los cursos iniciales de álgebra y geometría, en los cuales se ha demostrado que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$–espacio vectorial.

A pesar de que un espacio vectorial (visto como estructura algebraica) tiene propiedades más restrictivas que un cuerpo y de que no satisface los axiomas de orden. En este capítulo introduciremos el concepto de **norma**, el cual nos permitirá dotar a $\mathbb{R}^n$ de ciertas propiedades geométricas o *topológicas*.

Consideraremos a $\mathbb{R}^n$ como el conjunto formado por las n–tuplas $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$, donde t denota la transposición.

1. Preliminares

DEFINICIÓN 1.1. *Una **norma** en $\mathbb{R}^n$ es una función $N\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ que satisface las siguientes propiedades:*

(N1) ***(Positividad)*** *$N(\vec{x}) = 0$ si y sólo si $\vec{x} = \vec{0}$.*

(N2) ***(Homogeneidad)*** *$N(\lambda\vec{x}) = |\lambda| N(\vec{x})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.*

(N3) ***(Desigualdad triangular)*** *$N(\vec{x}+\vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$ para todo par $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.*

OBSERVACIÓN 1. *Notemos que si $n = 1$, entonces la función valor absoluto:*

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

*satisface las propiedades **(N1)**–**(N3)**. Por dicha razón, una norma en $\mathbb{R}^n$ puede ser vista como una generalización de la función valor absoluto y la propiedad **(N3)** es conocida como la desigualdad triangular.*

A continuación veremos algunas propiedades básicas de las normas.

LEMA 1.1. *Si $N(\cdot)$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *$N(\vec{x}) = N(-\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.*
(ii) *$N(\vec{x} - \vec{y}) = N(\vec{y} - \vec{x})$ para todo par $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.*
(iii) *$N(\vec{x} - \vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$ para todo par $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.*

DEMOSTRACIÓN. Usando **(N2)** sabemos que

$$N(-\vec{x}) = N(-1\vec{x}) = |-1| N(\vec{x}) = N(\vec{x}),$$

lo cual implica (i).

Usando la propiedad (i) combinada con **(N2)**, tenemos que:

$$N(\vec{x}-\vec{y}) = N(-\{\vec{y}-\vec{x}\}) = |-1|N(\vec{y}-\vec{x}) = N(\vec{y}-\vec{x}),$$

lo cual implica (ii).

Usando la propiedad **(N3)** (*i.e.*, la desigualdad triangular) combinada con (i), tenemos que

$$N(\vec{x}-\vec{y}) = N(\vec{x}+\{-\vec{y}\}) \leq N(\vec{x}) + N(-\vec{y}) = N(\vec{x}) + N(\vec{y}),$$

lo cual implica (iii). □

LEMA 1.2. *Si $N(\cdot)$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $|N(\vec{x}) - N(\vec{y})| \leq N(\vec{x}+\vec{y})$ *para todo par* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
(ii) $|N(\vec{x}) - N(\vec{y})| \leq N(\vec{x}-\vec{y})$ *para todo par* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACIÓN. Sólo demostraremos (i) y dejamos la desigualdad (ii) como ejercicio. En primer lugar, consideremos:

$$\vec{x} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{y}.$$

Usando **(N3)** y la propiedad (i) del Lema anterior, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} N(\vec{x}) & \leq & N(\vec{x}+\vec{y}) + N(-\vec{y}) \\ & \leq & N(\vec{x}+\vec{y}) + N(\vec{y}), \end{array}$$

lo cual nos permite deducir la desigualdad:

$$N(\vec{x}) - N(\vec{y}) \leq N(\vec{x}+\vec{y}). \tag{1.1}$$

Del mismo modo, consideremos:

$$\vec{y} = \vec{y} + \vec{x} - \vec{x}.$$

Como antes, usando **(N3)** y la propiedad (i) del Lema anterior, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} N(\vec{y}) & \leq & N(\vec{x}+\vec{y}) + N(-\vec{x}) \\ & \leq & N(\vec{x}+\vec{y}) + N(\vec{x}), \end{array}$$

lo cual nos permite deducir la desigualdad:

$$N(\vec{y}) - N(\vec{x}) \leq N(\vec{x}+\vec{y}). \tag{1.2}$$

Usando la propiedad del valor absoluto

$$|u| = \text{máx}\{-u, u\},$$

combinada con las desigualdades (1.1) y (1.2) nos permite deducir:

$$|N(\vec{x}) - N(\vec{y})| = \text{máx}\{N(\vec{y}) - N(\vec{x}), N(\vec{x}) - N(\vec{y})\} \leq N(\vec{x}+\vec{y}),$$

lo cual concluye la demostración de (i). □

2. La norma euclidiana

Dado un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, su **norma euclidiana** se denota por:

$$||\vec{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{1.3}$$

La norma euclidiana esta relacionada al producto interno estandar

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

debido a la identidad:

$$||\vec{x}||_2 = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}. \tag{1.4}$$

Finalmente será útil recordar la desigualdad de Cauchy–Schwarz[1]:

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq ||\vec{x}||_2 ||\vec{y}||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}, \tag{1.5}$$

cuya demostración se presenta al final del capítulo.

Teorema 1.1. *La función $\vec{x} \to ||\vec{x}||_2$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. En primer lugar demostraremos la propiedad **(N1)**. Si $\vec{x} = \vec{0}$ se verifica trivialmente que $||\vec{x}||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} 0^2} = 0$. Por otro lado, ahora supondremos que $||\vec{x}||_2 = 0$ y demostraremos que $\vec{x} = \vec{0}$. En efecto,

$$\begin{aligned} ||\vec{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = 0 \quad &\iff \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \\ &\iff \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0. \end{aligned}$$

Supongamos (con la idea de llegar a una contradicción) que $\vec{x} \neq \vec{0}$, es decir, existe al menos algún índice $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x_j \neq 0$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $1 < j < n$, lo cual implica:

$$0 < x_j^2 = -\sum_{i=1, i\neq j}^{n} x_i^2 \leq 0$$

y contradice los axiomas de orden. Por lo tanto $\vec{x} = \vec{0}$ y se verifica **(N1)**.

A continuación, notemos que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, la propiedad **(N2)** se verifica gracias a la propiedad homogénea de las sumatorias:

$$\begin{aligned} ||\lambda\vec{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i^2} \quad &= \quad \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ &= \quad \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ &= \quad |\lambda|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\lambda| ||\vec{x}||_2 \end{aligned}$$

[1] En la literatura Rusa y Soviética se la conoce como Desiguldad de Cauchy–Buniakowsky.

donde usamos que $|\lambda| = \sqrt{\lambda^2}$. Por lo tanto, se verifica la propiedad **(N2)**.

Finalmente, la propiedad **(N3)** es equivalente a la desigualdad

$$||\vec{x}+\vec{y}||_2 \leq ||\vec{x}||_2 + ||\vec{y}||_2 \quad \text{para todo} \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

la cual es conocida como *Desigualdad de Minkowski.*

A continuación demostraremos la desigualdad (1.6), para ello notemos que:

$$\begin{aligned} ||\vec{x}+\vec{y}||_2^2 &= (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) \\ &= \vec{x}\cdot\vec{x} + 2(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \vec{y}\cdot\vec{y} \\ &= ||\vec{x}||_2^2 + 2(\vec{x}\cdot\vec{y}) + ||\vec{y}||_2^2, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a (1.4) y la conmutatividad del producto interno.

Ahora, usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz, tenemos que:

$$\begin{aligned} ||\vec{x}+\vec{y}||_2^2 &\leq ||\vec{x}||_2^2 + 2||\vec{x}||_2||\vec{y}||_2 + ||\vec{y}||_2^2 \\ &\leq (||\vec{x}||_2 + ||\vec{y}||_2)^2. \end{aligned}$$

Finalmente, la desigualdad de Minkowski se obtiene al aplicar la raíz cuadrada a la desigualdad precedente. $\square$

3. Las normas $||\cdot||_p$

Definición 1.2. *Un par de números reales $p \geq 1$ y $q \geq 1$ se dicen **conjugados** si satisfacen la igualdad:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{1.7}$$

Si $p \geq 1$ y $q \geq 1$ son conjugados, es fácil demostrar que

$$\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \quad \text{y} \quad p = (p-1)q. \tag{1.8}$$

Dado un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $p \geq 1$ definiremos la expresión

$$||\vec{x}||_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.9}$$

El concepto de conjugación permitirá definir la *Desigualdad de Hölder*:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.10}$$

la cual será demostrada en un anexo al final del capítulo.

Teorema 1.2. *La función $\vec{x} \to ||\vec{x}||_p$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. La propiedades **(N1)** y **(N2)** se demuestran de un modo similar al caso de la norma euclidiana y se dejan como ejercicio para el lector. Sólo demostraremos la desigualdad triangular.

En primer lugar, notemos que:

$$\begin{array}{rcl}||\vec{x}+\vec{y}||_p^p & = & \sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|x_k+y_k|\\ & \leq & \sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}(|x_k|+|y_k|)\\ & \leq & \sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|x_k|+\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|y_k|.\end{array}$$

Al aplicar la desigualdad de Hölder a las sumatorias de la derecha se obtiene:

$$\begin{array}{rcl}||\vec{x}+\vec{y}||_p^p & \leq & \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\ & \leq & \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}}(||\vec{x}||_p+||\vec{y}||_p).\end{array}$$

Usando las identidades (1.8), podemos ver que

$$\begin{array}{rcl}||\vec{x}+\vec{y}||_p^p & \leq & \Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\Big)^{\frac{p-1}{p}}(||\vec{x}||_p+||\vec{y}||_p)\\ & \leq & ||\vec{x}+\vec{y}||_p^{p-1}(||\vec{x}||_p+||\vec{y}||_p),\end{array}$$

tras lo cual se deduce

$$||\vec{x}+\vec{y}||_p \leq ||\vec{x}||_p+||\vec{y}||_p$$

y se concluye la demostración. □

El caso de valores $p\in(0,1)$ no define una norma. Ver sección de ejercicios.

Ahora, notemos que dado un vector $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^t\in\mathbb{R}^n$ podemos ver las normas:

$$\begin{array}{rcl}||\vec{x}||_1 & = & \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|\\ ||\vec{x}||_2 & = & (\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}\\ ||\vec{x}||_3 & = & (\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^3)^{\frac{1}{3}}\\ \vdots & = & \vdots\\ ||\vec{x}||_p & = & (\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\end{array}$$

para todo $p\geq 1$. Una pregunta posible es saber si la expresión $||\vec{x}||_p$ está definida cuando p tiende a $+\infty$. La respuesta es afirmativa:

LEMA 1.3. *Para todo vector $\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^t\in\mathbb{R}^n$, se tiene que*

$$\lim_{p\to+\infty}||\vec{x}||_p=||\vec{x}||_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}. \tag{1.11}$$

DEMOSTRACIÓN. El lector debe verificar las siguientes desigualdades:

$$\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}^p\leq|x_1|^p+|x_2|^p+\ldots+|x_n|^p\leq n\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}^p.$$

Luego, podemos notar que:

$$\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}\leq(|x_1|^p+|x_2|^p+\ldots+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}\leq n^{\frac{1}{p}}\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}.$$

y el resultado es una consecuencia del teorema de encaje (o sandwich) debido a que $n^{1/p} \to 1$ cuando $p \to +\infty$. □

TEOREMA 1.3. *La función $\vec{x} \to ||\vec{x}||_\infty$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero demostraremos la propiedad **(N1)**: Es fácil ver que si $\vec{x} = \vec{0}$, entonces $||\vec{x}||_\infty = 0$. Por otro lado, si tenemos que $||\vec{x}||_\infty = 0$, notemos que:

$$0 \leq |x_i| \leq \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = 0,$$

lo que implica por axiomas de orden que $|x_i| = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y por lo tanto $\vec{x} = 0$.

La demostración de la propiedad **(N2)** es directa, en efecto:

$$\begin{aligned} ||\lambda\vec{x}||_\infty &= \text{máx}\{|\lambda x_1|, |\lambda x_2|, \ldots, |\lambda x_n|\} \\ &= \text{máx}\{|\lambda||x_1|, |\lambda||x_2|, \ldots, |\lambda||x_n|\} \\ &= |\lambda| \, \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \\ &= |\lambda|||\vec{x}||_\infty. \end{aligned}$$

La demostración de la propiedad **(N3)** utiliza la desigualdad triangular del valor absoluto:

$$\begin{aligned} |x_k + y_k| &\leq |x_k| + |y_k| \\ &\leq \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} + |y_k| \\ &\leq \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} + \text{máx}\{|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|\}. \end{aligned}$$

Notemos que la desigualdad es válida para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ debido a que la expresión de la derecha no depende del subíndice k. Por lo tanto

$$\text{máx}\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\} \quad \leq \quad \text{máx}\{|x_i| \colon i = 1, \ldots, n\} + \text{máx}\{|y_i| \colon i = 1, \ldots, n|\},$$

lo que equivale a:

$$||\vec{x} + \vec{y}||_\infty \leq ||\vec{x}||_\infty + ||\vec{y}||_\infty$$

y concluye la demostración. □

La norma $||\cdot||_\infty$ permite deducir un corolario de la desigualdad de Hölder cuando $p = 1$:

LEMA 1.4. *Para todo par de vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq ||\vec{x}||_1 ||\vec{y}||_\infty. \tag{1.12}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| &\leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\Big) \text{máx}\{|y_1|, \ldots, |y_n|\} \\ &\leq ||\vec{x}||_1 ||\vec{y}||_\infty, \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

4. Un ejemplo ilustrativo

Usando nuestro conocimiento de las normas anteriores, veremos que dado un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$, la expresión

$$||\vec{x}|| = 2|x_1| + \sqrt{3|x_2|^2 + \max\{|x_3|, 2|x_4|\}^2},$$

define una norma en $\mathbb{R}^4$:

En primer lugar, verificaremos la propiedad **(N1)**. Es claro que si $\vec{x} = (0,0,0,0)$, entonces $||\vec{x}|| = 0$. Por otro lado, supongamos que $||\vec{x}|| = 0$. La demostración de que $\vec{x} = 0$ es análoga a la realizada con las normas $||\cdot||_p$.

La propiedad **(N2)** se verifica trivialmente y se deja al lector.

Con el fin de verificar la propiedad **(N3)**, sean $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Entonces, usando la desigualdad triangular para números reales se tiene que:

$$\begin{aligned}
||\vec{x}+\vec{y}|| &= 2|x_1+y_1| + \sqrt{3|x_2+y_2|^2 + \max\{|x_3+y_3|, 2|x_4+y_4|\}^2} \\
&\leq 2|x_1| + 2|y_1| + \sqrt{3|x_2+y_2|^2 + \max\{|x_3+y_3|, 2|x_4+y_4|\}^2} \\
&= 2|x_1| + 2|y_1| + \sqrt{|\sqrt{3}x_2 + \sqrt{3}y_2|^2 + \max\{|x_3+y_3|, |\sqrt{2}x_4 + \sqrt{2}y_4|\}^2}
\end{aligned}$$

Ahora, consideraremos dos casos: Puede ocurrir que

$$\max\{|x_3+y_3|, |\sqrt{2}x_4 + \sqrt{2}y_4|\} = \begin{cases} |x_3+y_3| \\ |\sqrt{2}x_4 + \sqrt{2}y_4| \end{cases}$$

Entonces, la desigualdad anterior es equivalente a alguna de las siguientes dos desigualdades

$$||\vec{x}+\vec{y}|| \leq 2|x_1| + 2|y_1| + \sqrt{|\sqrt{3}x_2 + \sqrt{3}y_2|^2 + |x_3+y_3|^2} \tag{1.13}$$

o

$$||\vec{x}+\vec{y}|| \leq 2|x_1| + 2|y_1| + \sqrt{|\sqrt{3}x_2 + \sqrt{3}y_2|^2 + |\sqrt{2}x_4 + \sqrt{2}y_4|^2}. \tag{1.14}$$

Usando la norma euclidiana en $\mathbb{R}^2$ y sus propiedades, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sqrt{|\sqrt{3}x_2 + \sqrt{3}y_2|^2 + |x_3+y_3|^2} &= ||(\sqrt{3}x_2, x_3) + (\sqrt{3}y_2, y_3)||_2 \\
&\leq ||(\sqrt{3}x_2, x_3)||_2 + ||(\sqrt{3}y_2, y_3)||_2 \\
&\leq \sqrt{3x_2^2 + x_3^2} + \sqrt{3y_2^2 + y_3^2}
\end{aligned}$$

y reemplazando en (1.13) se tiene que

$$\begin{aligned}
||\vec{x}+\vec{y}|| &\leq 2|x_1|+2|y_1|+\sqrt{|\sqrt{3}x_2+\sqrt{3}y_2|^2+|x_3+y_3|^2}\\
&\leq 2|x_1|+2|y_1|+\sqrt{3x_2^2+x_3^2}+\sqrt{3y_2^2+y_3^2}\\
&= 2|x_1|+\sqrt{3x_2^2+x_3^2}+2|y_1|+\sqrt{3y_2^2+y_3^2}\\
&\leq 2|x_1|+\sqrt{3x_2^2+\text{máx}\{|x_3|,2|x_4|\}^2}+2|y_1|+\sqrt{3y_2^2+\text{máx}\{|y_3|,2|y_4|\}^2}\\
&= ||\vec{x}||+||\vec{y}||,
\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración para el caso $\text{máx}\{|x_3+y_3|,|\sqrt{2}x_4+\sqrt{2}y_4|\} = |x_3+y_3|$. La demostración para el otro caso es análoga y se deja al lector.

5. Equivalencia de Normas

DEFINICIÓN 1.3. *Sean N y $\widetilde{N}$ dos normas en $\mathbb{R}^n$. Se dice que N* ***es equivalente a*** *$\widetilde{N}$ (es decir, $N \sim \widetilde{N}$) si existen dos constantes $c > 0$ y $C > 0$ tales que:*

$$c\widetilde{N}(\vec{x}) \leq N(\vec{x}) \leq C\widetilde{N}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{1.15}$$

El siguiente Lema es de gran importancia:

LEMA 1.5. *La equivalencia de normas define una relación de equivalencia en el conjunto de las normas en $\mathbb{R}^n$.*

DEMOSTRACIÓN. La reflexividad es trivial debido a que $N \sim N$ se verifica con $c = C = 1$.

Para verificar la simetría, notemos que la desigualdad izquierda de (1.15) implica:

$$\widetilde{N}(\vec{x}) \leq \frac{1}{c}N(\vec{x}). \tag{1.16}$$

Por otro lado, la desigualdad derecha de (1.15) implica:

$$\widetilde{N}(\vec{x}) \geq \frac{1}{C}N(\vec{x}). \tag{1.17}$$

Acoplando estas desigualdades tenemos:

$$\frac{1}{C}N(\vec{x}) \leq \widetilde{N}(\vec{x}) \leq \frac{1}{c}N(\vec{x}).$$

Finalmente supongamos que $N \sim \widetilde{N}$ y $\widetilde{N} \sim \hat{N}$, es decir se verifica (1.15) y

$$d\hat{N}(\vec{x}) \leq \widetilde{N}(\vec{x}) \leq D\hat{N}(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.18}$$

con $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$.

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}
dc\hat{N}(\vec{x}) &\leq c\widetilde{N}(\vec{x})\\
&\leq N(\vec{x})\\
&\leq C\widetilde{N}(\vec{x})\\
&\leq CD\hat{N}(\vec{x}).
\end{aligned}$$

Acoplando estas desigualdades, tenemos que:

$$dc\hat{N}(\vec{x}) \leq N(\vec{x}) \leq CD\hat{N}(\vec{x}),$$

lo cual implica $N \sim \hat{N}$ y se concluye la demostración. $\square$

TEOREMA 1.4. *Las normas* $||\cdot||_\infty$,$||\cdot||_1$ *y* $||\cdot||_2$ *satisfacen las siguentes propiedades:*

(i) $||\cdot||_\infty \sim ||\cdot||_1$.
(ii) $||\cdot||_\infty \sim ||\cdot||_2$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y notemos que:

$$||\vec{x}||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leq n \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = n||\vec{x}||_\infty.$$

Por otro lado, sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$|x_j| = ||\vec{x}||_\infty.$$

Lo cual permite deducir:

$$||\vec{x}||_\infty \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = ||\vec{x}||_1,$$

por lo tanto, se tiene que:

$$||\vec{x}||_\infty \leq ||\vec{x}||_1 \leq n||\vec{x}||_\infty$$

y se verifica la propiedad (i).

Ahora, notemos que:

$$||\vec{x}||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \leq \sqrt{n}||\vec{x}||_\infty.$$

Por otro lado, sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$|x_j| = ||\vec{x}||_\infty.$$

Lo cual permite deducir:

$$||\vec{x}||_\infty = |x_j| = \sqrt{x_j^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = ||\vec{x}||_2,$$

Book por lo tanto, se tiene que:

$$||\vec{x}||_\infty \leq ||\vec{x}||_2 \leq \sqrt{n}||\vec{x}||_\infty$$

y se verifica la propiedad (ii). $\square$

El siguiente resultado jugará un papel fundamental en este curso:

TEOREMA 1.5. *Todas las normas en* $\mathbb{R}^n$ *son equivalentes.*

Lamentablemente, ahora carecemos de las herramientas necesarias para su demostración. Sin embargo, en el siguiente capítulo podremos demostrar este importante resultado (gracias a la propiedad de Bolzano–Weierstrass). El Teorema 1.5 tiene como consecuencia de que el conjunto:

$$\mathcal{N} = \Big\{N \colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty), \quad | \; N \text{ es una norma en } \mathbb{R}^n\Big\}$$

tiene sólo una clase de equivalencia.

Los resultados vistos sobre equivalencia de normas nos ayudarán a definir nuevas normas.

6. Anexo: Demostración de la desigualdad de Cauchy–Schwarz

El caso $\vec{y} = \vec{0}$ es trivial, por que –sin pérdida de generalidad– supondremos que $\vec{y} \neq \vec{0}$, lo cual implica $||\vec{y}||_2 > 0$.

Inspirados en el proceso de ortogonalización de Gramm–Schmidt, definamos el vector:

$$\vec{z} = \vec{x} - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})}{||\vec{y}||_2}\vec{y}.$$

Usando (1.4), notemos que:

$$\begin{aligned}
\vec{z} \cdot \vec{y} &= \Big(\vec{x} - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})}{||\vec{y}||_2}\vec{y}\Big) \cdot \vec{y} \\
&= \vec{x} \cdot \vec{y} - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})(\vec{y} \cdot \vec{y})}{||\vec{y}||_2} \\
&= \vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{x} \cdot \vec{y} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\vec{z}$ e $\vec{y}$ son ortogonales.

Por otro lado, notemos (usando la ortogonalidad recién vista) que:

$$\begin{aligned}
\vec{z} \cdot \vec{z} &= \vec{z} \cdot \Big(\vec{x} - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})}{||\vec{y}||_2}\vec{y}\Big) \\
&= \vec{z} \cdot \vec{x} - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})(\vec{z} \cdot \vec{y})}{||\vec{y}||_2^2} \\
&= \vec{z} \cdot \vec{x},
\end{aligned}$$

lo cual implica

$$\vec{z} \cdot \vec{x} \geq 0$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\vec{z} \cdot \vec{x} &= \Big(\vec{x} - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})}{||\vec{y}||_2}\vec{y}\Big) \cdot \vec{x} \\
&= \vec{x} \cdot \vec{x} - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})(\vec{x} \cdot \vec{y})}{||\vec{y}||_2^2} \\
&= ||\vec{x}||_2^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{||\vec{y}||_2^2} \geq 0.
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad equivale a:

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq ||\vec{x}||_2^2 ||\vec{y}||_2^2,$$

luego se aplica la raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad, obteniéndose:

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq ||\vec{x}||_2 ||\vec{y}||_2,$$

lo cual concluye la demostración.

7. Anexo: Demostración de la desigualdad de Hölder

La demostración es una consecuencia de diversos lemas preparatorios:

Lema 1.6. *Si* $p \in (0, 1)$*, entonces*

$$1 + px \geq (1 + x)^p \quad \text{para todo} \quad x \geq -1.$$

Demostración. Construímos la función auxiliar $f\colon [-1,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 + px - (1+x)^p$$

y demostraremos que f no toma valores positivos. En efecto, notemos que:

$$f'(x) = p - p(x+1)^{p-1}$$

y por lo tanto $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Ahora, notemos que:

$$f''(x) = -p(p-1)(1+x)^{p-2}$$

y se tiene que $f''(0) = -p(p-1) > 0$. Por lo tanto, por el criterio de la segunda derivada, sabemos que f tiene un mínimo global en $x = 0$. Por lo tanto:

$$f(x) \geq f(0) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \geq -1,$$

lo cual es equivalente a $1 + px \geq (1+x)^p$ y concluye la demostración. □

Es interesante notar que este Lema es un resultado inverso a la Desigualdad de Bernoulli:

$$1 + qx \leq (1+x)^q \quad \text{para todo} \quad x \geq -1 \quad \text{y} \quad q \in \mathbb{N},$$

estudiada en los cursos de Cálculo de una variable.

Lema 1.7. *Se tiene que:*

$$x^{\alpha}y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y \quad \text{para todo} \quad \alpha \in [0,1] \quad \text{y} \quad x, y \geq 0. \tag{1.19}$$

Demostración. Notemos que la desigualdad $x \leq x$ equivale a (1.19) cuando $\alpha = 1$. De igual forma, la desigualdad $y \leq y$ equivale a (1.19) cuando $\alpha = 0$, por lo tanto sólo consideraremos el caso $\alpha \in (0,1)$.

Como el caso $y = 0$ se verifica trivialmente, consideraremos $y > 0$ y la desigualdad (1.19) es equivalente a:

$$\frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}}y \leq \alpha x + (1-\alpha)y \quad \text{para todo} \quad \alpha \in (0,1), x \geq 0 \quad \text{e} \quad y > 0, \tag{1.20}$$

la cual a su vez es equivalente a:

$$\frac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}} \leq \alpha\frac{x}{y} + (1-\alpha) = \alpha(\frac{x}{y} - 1) + 1 \quad \text{para todo} \quad \alpha \in (0,1), x \geq 0 \quad \text{e} \quad y > 0.$$

Con el cambio de variable $1 + z = \frac{x}{y}$, podemos ver que esta última desigualdad es equivalente a:

$$(1+z)^{\alpha} \leq 1 + \alpha z,$$

Book la cual es cierta por el Lema 1.6, lo cual concluye la demostración. □

Esta desigualdad involucra dos variables (x e y) pero se transformó mediante ingeniosas sustituciones en una desigualdad de una variable. Esta idea es recurrente en muchas desigualdades de dos variables.

Lema 1.8 (Desigualdad de Young). *Dados dos números positivos u y v, se tiene que:*

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \quad \text{donde} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p \geq 1, q \geq 1. \tag{1.21}$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el Lema 1.7, sabemos que

$$x^{\alpha}y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y \quad \text{para todo} \quad \alpha \in [0,1] \quad \text{y} \quad x, y \geq 0$$

Como $p \geq 1$, y es conjugado con q, podemos utilizar:

$$\alpha = \frac{1}{p} \in (0,1) \quad \text{y} \quad 1-\alpha = \frac{1}{q},$$

obteniendo:

$$x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \quad \text{para todo} \quad x, y \geq 0.$$

La desigualdad de Young se obtiene con los caBookmbios de variable $x = u^p$ e $y = v^q$ y reemplazando en la desigualdad anterior. □

Con estos resultados, estamos en condiciones de demostrar la desigualdad de Hölder. Para ello, utilizaremos la desigualdad de Young con los valores:

$$u = \frac{|x_k|}{||\vec{x}||_p} \quad \text{y} \quad v = \frac{|y_k|}{||\vec{y}||_q}.$$

Por lo tanto, la desigualdad de Young (aplicada a estos números) implica:

$$\frac{|x_k|}{||\vec{x}||_p}\frac{|y_k|}{||\vec{y}||_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|x_k|^p}{||\vec{x}||_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_k|^p}{||\vec{y}||_q^q}.$$

Como esta desigualdad es válida para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sumamos término a término, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|}{||\vec{x}||_p}\frac{|y_k|}{||\vec{y}||_q} &\leq \tfrac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_k|^p}{||\vec{x}||_p^p} + \sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{q}\frac{|y_k|^q}{||\vec{y}||_q^q} \\
&\leq \tfrac{1}{p}\tfrac{1}{||\vec{x}||_p^p}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p + \tfrac{1}{q}\tfrac{1}{||\vec{y}||_q^q}\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q \\
&\leq \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1,
\end{aligned}$$

lo cual permite concluir que:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq ||\vec{x}||_p||\vec{y}||_q,$$

que es la Desigualdad de Hölder.

8. Espacio Vectorial Normado (*)

Las definiciones y resultados vistos en este capítulo pueden –en ciertos casos– extenderse a $\mathbb{K}$–espacios vectoriales distintos de $\mathbb{R}^n$.

En efecto, se dice que (E, N) es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial normado si E es un $\mathbb{K}$–espacio vectorial y $N\colon E \times E \to \mathbb{R}$, es una función que satiface las propiedades **(N1)**,**(N2)** y **(N3)** vistas al inicio del capítulo.

9. Bibliografía adicional

Gran parte de este capítulo se inspira en el libro de Bruno Aebischer [**1**]. Sin embargo, existen muchos y muy buenos libros sobre este tema. Recomendamos la sección 1.3 de [**12**].

Ejercicios

1.- Demuestre que la función $||\cdot||_*\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ definida por
$$||\vec{x}||_* = ||\vec{x}||_1 + ||\vec{x}||_2 + \ldots + ||\vec{x}||_{10}$$
es una norma.

2.- Sean $\alpha_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Demuestre que la función
$$||\vec{x}|| = \alpha_1|x_1| + \alpha_2|x_2| + \ldots + \alpha_n|x_n|$$
es una norma.

3.- Sea $||\cdot||\colon \mathbb{R}^4 \to [0,+\infty)$ una norma en $\mathbb{R}^4$ y $\alpha > 0$. Demuestre que
$$||(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)||_* = ||(x_1,x_2,x_3,x_4)|| + \alpha|x_5|$$
es una norma en $\mathbb{R}^5$.

4.- Repita el ejercicio anterior para la norma
$$||(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)||_{**} = ||(x_2,x_3,x_4,x_5)|| + \alpha|x_1|$$

5.- Demuestre que si $p \in (0,1)$ entonces $||\cdot||_p$ no es una norma. Idea: considere el caso $n = 2$ y vectores del tipo $\vec{x} = (1,1)$ y luego trate generalizar a n arbitrario.

6.- Demuestre que $||\cdot||_\infty$ y $||\cdot||_p$ (con $p \geq 1$) son equivalentes.

7.- Demuestre que si $p \geq 1$ y $q \geq 1$ entonces $||\cdot||_p$ y $||\cdot||_q$ son equivalentes.

8.- Sea $N\colon \mathbb{R}^3 \to [0,+\infty[$ definida por
$$N(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + |x_3|$$
Es una norma? En caso afirmativo demuestre que es equivalente a alguna norma $||\cdot||_p$.

9.- Lo mismo para $N\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ definida por:
$$N(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{(\text{máx}\{|x_1|,|x_2|\})^2 + 2x_3}.$$

10.- Lo mismo para $N\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ definida por:
$$N(x_1,x_2,x_3) = |x_1 + 2x_2| + |x_3|.$$

11.- Considere la función
$$\hat{N}(x,y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$
Demuestre que es una norma en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que es equivalente a $||\cdot||_2$.

12.- Sean $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$. Demuestre que
$$||\vec{x}+\vec{y}||_2^2 = ||\vec{x}||_2^2 + ||\vec{y}||_2^2.$$

13.- Sean $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$. Demuestre que
$$\frac{1}{2}\left(||\vec{x}+\vec{y}||_2^2 + ||\vec{x}-\vec{y}||_2^2\right) = ||\vec{x}||_2^2 + ||\vec{y}||_2^2.$$

14.- Sean $||\cdot||$ una normal, $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función estricamente decreciente y $p \in [0,1]$. Demuestre que
$$f(||p\vec{x} + (1-p)\vec{y}||) \geq f(p||\vec{x}||) + f((1-p)||\vec{y}||).$$

15.- Determine si las siguientes funciones $N\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ son una norma:

i) La función:

$$N(\vec{x}) = \frac{||\vec{x}||_1}{1 + ||\vec{x}||_1}$$

ii) La función

$$N(\vec{x}) = \alpha||\vec{x}||_2 + ||\vec{x}||_\infty, \quad \alpha > 0$$

16.- Sean $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ e $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$. Demuestre la desigualdad

$$e^{|x_1||y_1|}e^{|x_2||y_2|} \cdots e^{|x_n||y_n|} \leq e^{||\vec{x}||_5||\vec{y}||_{\frac{5}{4}}}.$$

17.- Utilice la desigualdad de Cauchy–Schwarz para demostrar que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales cualquiera, entonces se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

18.- Sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$\Big|||\vec{x}|| - ||\vec{y}||\Big| \leq ||\vec{x} - \vec{y}||.$$

19.- Sean $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$ y $p, q \geq 1$ Demuestre la desigualdad

$$\frac{1}{\sqrt[q]{n}} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}$$

20.- Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que:

$$||A\vec{x}||_1 \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) ||\vec{x}||_1.$$

Capítulo 2

Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

En este capítulo definiremos ciertos subconjuntos notables de $\mathbb{R}^n$: los conjuntos **abiertos** y los conjuntos **cerrados**. La definición de dichos conjuntos se realiza en en base al concepto de **bola abierta**, el cual generaliza la noción de intervalo abierto en $\mathbb{R}$.

1. Preliminares

Definición 2.1. *Sean $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ y $||\cdot||$ una norma en $\mathbb{R}^n$. La* ***bola abierta*** *de centro $\vec{x}_0$ y radio r asociada a la norma $||\cdot||$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido por:*

$$B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon ||\vec{x} - \vec{x}_0|| < r\}. \tag{2.1}$$

Como existen diversas normas en $\mathbb{R}^n$, es claro que las bolas $B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)$ son diferentes segun la norma que se considere. Por ejemplo[1], notemos algunas bolas en $\mathbb{R}^2$ con centro en $(0,0)$ y radio $r = 1$:

$$\begin{aligned} B_{||\cdot||_1}(\vec{0}, 1) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon |x_1| + |x_2| < 1\}, \\ B_{||\cdot||_2}(\vec{0}, 1) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}, \\ B_{||\cdot||_\infty}(\vec{0}, 1) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}. \end{aligned}$$

Definición 2.2. *Sean $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ y $||\cdot||$ una norma en $\mathbb{R}^n$. La* ***bola cerrada*** *de centro $\vec{x}_0$ y radio r asociada a la norma $||\cdot||$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido por:*

$$\overline{B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon ||\vec{x} - \vec{x}_0|| \leq r\}. \tag{2.2}$$

Una simple consecuencia de la definición es la contención:

$$B_{||\cdot||(\vec{x}_0, r)} \subset \overline{B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)}.$$

Definición 2.3. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es* ***acotado*** *si es subconjunto de alguna bola en $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 1. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es* ***acotado*** *si y sólo si existe $R > 0$ tal que*

$$||\vec{x}|| < R \quad \forall \vec{x} \in A, \tag{2.3}$$

donde $||\cdot||$ es una norma cualquiera en $\mathbb{R}^n$.

[1]Recomendamos el link para visualizar mejor las bolas con diversas normas $||\cdot||_p$ en https://commons.wikimedia.org/wiki/File:2D_unit_balls.svg#/media/File:2D_unit_balls.svg

Demostración. En primer lugar, supondremos que existe $R > 0$ tal que la desigualdad (2.3) se verifica. Por lo tanto, es claro que A es un subconjunto de $B_{||\cdot||}(\vec{0}, R)$.

Ahora supondremos que A es acotado y demostraremos la desigualdad (2.3). En efecto, si A es acotado, la Definición 2.3 implica que existe $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tales que:

$$A \subseteq B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r),$$

es decir, se tiene que:

$$||\vec{x} - \vec{x}_0|| < r \quad \forall \vec{x} \in A.$$

Por lo tanto, podemos demostrar que todo vector $\vec{x} \in A$ verifica:

$$||\vec{x}|| \leq ||\vec{x} - \vec{x}_0|| + ||\vec{x}_0|| < r + ||\vec{x}_0||$$

y se verifica la desigualdad (2.3) con $R = r + ||\vec{x}_0||$. □

Observación 2. *La proposición precedente nos da un buen criterio para saber cuando un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ no es acotado: se dice que A no es acotado si y sólo si:*

$$\forall R > 0 \quad \exists \vec{x} \in A \quad \text{tal que} \quad ||\vec{x}|| \geq R.$$

2. Conjuntos Abiertos en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.4. *Un subconjunto $O \subset \mathbb{R}^n$ es* ***abierto*** *si*

$$\forall \vec{x} \in O \quad \exists r_x > 0 \quad \text{tal que} \quad B(\vec{x}, r_x) \subset O, \tag{2.4}$$

donde $B(\vec{x}, r)$ es alguna bola abierta de centro $\vec{x}$ y radio $r_x > 0$.

Observación 3. *Notemos que:*

- *La notación r_x indica que el radio depende de $\vec{x}$.*
- *Como las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, entonces la propiedad no depende de la norma utilizada.*

Usualmente, el conjunto de todos los subconjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ se denota por $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$[2].

Observación 4. *La definición 2.4 permite decir cuando un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ no es abierto. En efecto, diremos que $A \notin \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ si:*

$$\exists \vec{x} \in A \quad \text{tal que} \quad \forall r > 0 \qquad B(\vec{x}, r) \not\subset A, \tag{2.5}$$

A continuación, veremos algunos conjuntos abiertos importantes en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2. *$\mathbb{R}^n$ es abierto.*

Demostración. Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector cualquiera, es fácil ver que para todo $r > 0$ se verifica la propiedad

$$B_{||\cdot||}(\vec{x}, r) \subset \mathbb{R}^n,$$

lo cual concluye la demostración. □

Proposición 3. *El conjunto vacío $\varnothing \subset \mathbb{R}^n$ es abierto.*

[2]La letra $\mathcal{O}$ se debe a la palabra *ouvert* (abierto en Francés).

Demostración. Antes de iniciar la demostración, debemos enfatizar las sutilezas y complejidades asociadas al conjunto vacío [3].

Usando la definición intuitiva de conjunto vacío, podemos verificar que para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, la afirmación $p : \vec{x} \in \varnothing$ es falsa.

Usando lo anterior y dado $r > 0$, podemos concluir que la afirmación

$$\vec{x} \in \varnothing \Rightarrow B(\vec{x}, r) \subset \varnothing$$

es siempre verdadera, independientemente de la falsedad o veracidad de la proposición $q : B(\vec{x}, r) \subset \varnothing$[4]. □

Proposición 4. *Toda bola abierta $B_{||\cdot||}(\vec{x}, r)$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Recordemos que

$$B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon ||\vec{x} - \vec{x}_0|| < r\}.$$

Dado $\vec{x} \in B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)$, tenemos que demostrar la existencia de $r_x > 0$ tal que:

$$B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) \subset B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r).$$

Consideremos

$$r_x = r - ||\vec{x} - \vec{x}_0|| > 0$$

y supongamos que $\vec{y} \in B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{y} \in B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) \quad &\Rightarrow \quad ||\vec{y} - \vec{x}|| < r - ||\vec{x} - \vec{x}_0||, \\ &\Rightarrow \quad ||\vec{y} - \vec{x}|| + ||\vec{x} - \vec{x}_0|| < r, \\ &\Rightarrow \quad ||\vec{y} - \vec{x}_0|| < r, \\ &\Rightarrow \quad \vec{y} \in B_{||\cdot||}B(\vec{x}_0, r). \end{aligned}$$

Luego, existe $r_x > 0$ tal que $B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) \subset B_{||\cdot||}B(\vec{x}_0, r)$, lo cual concluye la demostración. □

Proposición 5. *Sean $O_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $O_2 \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

i) *$O_1 \cup O_2$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.*
ii) *$O_1 \cap O_2$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $\vec{x} \in O_1 \cup O_2$, es decir $\vec{x} \in O_1$ o $\vec{x} \in O_2$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\vec{x} \in O_1$. Como O_1 es abierto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \exists r_x > 0 \quad &\text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) \subset O_1 \\ &\text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) \subset O_1 \subset O_1 \cup O_2, \end{aligned}$$

lo cual implica (i).

Ahora demostraremis ii). Para ello, sea $\vec{x} \in O_1 \cap O_2$. Como O_1 y O_2 son abiertos, sabemos que:

$$\exists \tilde{r}_x > 0 \quad \text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{x}, \tilde{r}_x) \subset O_1$$

y

$$\exists \hat{r}_x > 0 \quad \text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{x}, \hat{r}_x) \subset O_2.$$

Elegimos $r_x < \min\{\tilde{r}_x, \hat{r}_x\}$ y concluímos que:

$$\exists r_x > 0 \quad \text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) \subset O_1 \cap O_2.$$

---

[3] El lector pude revisar la Definición intuitiva presentada in [**11**].

[4] Un breve repaso de tablas de verdad nos muestra que si p es falso, entonces $p \Rightarrow q$ es siempre verdadero.

$\square$

Será muy importante que el(la) estudiante estudie el caso de las uniones e intersecciones finitas e infinitas de conjuntos abiertos (ver la sección de ejercicios).

Ejemplo 2.1. *El conjunto*

$$C = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

no es abierto.

Para ello usaremos la observación 4 y escogeremos el vector $\vec{e}_1 = (1, 0) \in C$*. Es fácil verificar que para todo* $r > 0$ *se tiene que*

$$B_{||\cdot||_2}(\vec{e}_1, r) \not\subset C.$$

En efecto, sea $r > 0$ *fijo y consideremos el vector* $(1, |r|/2)$*. Es claro que* $(1, -|r|/2) \in B_{||\cdot||_2}(\vec{e}_1, r)$ *pero* $(1, -|r|/2) \notin C$*.*

Ejemplo 2.2. *El conjunto*

$$A = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

es abierto. En efecto, para todo vector $\vec{x} = (x_1, x_2) \in A$*, como* $x_2 > 0$*, elegimos* $r_x \in (0, x_2)$*. Verificaremos que:*

$$B_{||\cdot||_2}(\vec{x}, r_x) \subset A.$$

Para demostrar esta contención, usaremos algunas propiedades de la función valor absoluto. Notemos que

$$\begin{aligned}
(u, v) \in B_{||\cdot||_2}(\vec{x}, r_x) \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{|u - x_1|^2 + |v - x_2|^2} < r_x \\
&\Rightarrow \quad |v - x_2| < r_x \\
&\Rightarrow \quad x_2 - r_x < v < x_2 + r_x \\
&\Rightarrow \quad 0 < x_2 - r_x < v \\
&\Rightarrow \quad (u, v) \in A,
\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración.

Ejemplo 2.3. *El conjunto*

$$D = \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 > 0 \quad \text{y} \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

es abierto.

En efecto, uno puede observar que

$$D = A \cap B_{||\cdot||_2}(\vec{0}, 1),$$

es decir, D *es la intersección de dos abiertos: el conjunto* A *definido en el ejemplo anterior y la bola abierta de centro* $(0, 0)$ *y radio* $r = 1$*. Como la intersección de dos abiertos es un abierto, podemos concluir que* D *es un abierto.*

Lema 2.1. *Sean* $O \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\vec{x}_0$*, entonces* $O \setminus \{\vec{x}_0\}$ *también es un conjunto abierto en* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración. Sea $\vec{x} \in O \setminus \{\vec{x}_0\}$. Tenemos que demostrar que existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}, r) \subset O \setminus \{\vec{x}_0\}$.

Como $\vec{x} \in O$ y O es abierto, se tiene

$$\exists r_x > 0 \quad \text{tal que} \quad B(\vec{x}, r_x) \subset O.$$

Además sabemos que $\vec{x} \neq \vec{x}_0$. Por lo tanto, usando las propiedades de las normas sabemos que $||\vec{x} - \vec{x}_0|| > 0$. Ahora definamos $r = \min\{r_x, ||\vec{x} - \vec{x}_0||\}$.

Entonces, notemos que

$$\begin{aligned}
\vec{y} \in B(\vec{x}, r) \quad &\Rightarrow \quad ||\vec{y} - \vec{x}|| < r \\
&\Rightarrow \quad ||\vec{y} - \vec{x}|| < r_x \quad \text{y} \quad ||\vec{y} - \vec{x}|| < ||\vec{x} - \vec{x}_0|| \\
&\Rightarrow \quad \vec{y} \in B(\vec{x}, r_x) \quad \text{y} \quad ||\vec{x} - \vec{y}|| < ||\vec{x} - \vec{x}_0|| \leq ||\vec{x} - \vec{y}|| + ||\vec{y} - \vec{x}_0|| \\
&\Rightarrow \quad \vec{y} \in O \quad \text{y} \quad 0 < ||\vec{y} - \vec{x}_0|| \\
&\Rightarrow \quad \vec{y} \in O \quad \text{e} \quad \vec{y} \neq \vec{x}_0 \\
&\Rightarrow \quad \vec{y} \in O \setminus \{\vec{x}_0\}
\end{aligned}$$

y entonces $B(\vec{x}, r) \subset O \setminus \{\vec{x}_0\}$, lo cual concluye la demostración. □

3. Conjuntos Cerrados en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.5. *Un subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si su complemento F^c es abierto.*

Usualmente, el conjunto de todos los subconjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$ se denota por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$[5].

Proposición 6. *Los conjuntos $\mathbb{R}^n$ y $\varnothing$ son cerrados.*

Demostración. Notemos que:

$$(\mathbb{R}^n)^c = \varnothing \quad \text{y} \quad \varnothing^c = \mathbb{R}^n$$

y la demostración es consecuencia de las proposiciones 2 y 3. □

Proposición 7. *Todo singleton $\{\vec{x}_0\} \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado.*

Demostración. Por la Proposición 2 se tiene que que $\mathbb{R}^n$ es abierto y por Lema 2.1 sabemos que $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{x}_0\} = \{\vec{x}_0\}^c$ es abierto. Lo cual concluye la demostración. □

Proposición 8. *Toda bola cerrada $\overline{B_{||\cdot||}(\vec{x}, r)}$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Recordemos que

$$\overline{B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon ||\vec{x} - \vec{x}_0|| \leq r\}.$$

Demostraremos que

$$\overline{B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)}^c = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon ||\vec{x} - \vec{x}_0|| > r\}.$$

es un conjunto abierto.

[5] La letra $\mathcal{F}$ se debe a la palabra *Fermé* (cerrado en Francés).

Sea $\vec{x} \in \overline{B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)}^c$ y consideremos

$$r_x = ||\vec{x} - \vec{x}_0|| - r > 0$$

y supongamos que $\vec{y} \in B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \vec{y} \in B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) & \Rightarrow & ||\vec{y} - \vec{x}|| < ||\vec{x} - \vec{x}_0|| - r, \\ & \Rightarrow & ||\vec{y} - \vec{x}|| - ||\vec{x} - \vec{x}_0|| < -r, \\ & \Rightarrow & ||\vec{x} - \vec{x}_0|| - ||\vec{y} - \vec{x}|| > r, \\ & \Rightarrow & ||\vec{y} - \vec{x}_0|| \geq ||\vec{x} - \vec{x}_0|| - ||\vec{y} - \vec{x}|| > r, \\ & \Rightarrow & \vec{y} \in \overline{B_{||\cdot||}B(\vec{x}_0, r)}^c. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $r_x > 0$ tal que $B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) \subset \overline{B_{||\cdot||}B(\vec{x}_0, r)}^c$, lo cual concluye la demostración. □

Proposición 9. *Sean $F_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $F_2 \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos cerrados. Entonces:*

i) *$F_1 \cup F_2$ es cerrado.*
ii) *$F_1 \cap F_2$ es cerrado.*

Demostración. Usando las leyes de Morgan sabemos que:

$$(F_1 \cup F_2)^c = F_1^c \cap F_2^c \quad \text{y} \quad (F_1 \cap F_2)^c = F_1^c \cup F_2^c$$

y luego usamos los resultados de unión e intersección de abiertos enunciados en la Proposición 5. □

Será muy importante que el(la) estudiante estudie el caso de las uniones e intersecciones finitas e infinitas de conjuntos abiertos (ver la sección de ejercicios).

4. Vecindades en $\mathbb{R}^n$ (*)

El concepto de vecindad generaliza el concepto de conjunto abierto y es de gran utilidad.

Definición 2.6. *Si $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, se de dice que una **vecindad** de $\vec{x}_0$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que contiene una bola abierta con centro $\vec{x}_0$.*

Es claro que $\vec{x}_0$ puede tener muchas vecindades. Usualmente el conjunto de las vecindades de $\vec{x}_0$ se denota por $\mathcal{V}(\vec{x}_0)$ o $\mathcal{N}(\vec{x}_0)$[6].

Teorema 2.1. *V es una vecindad de $\vec{x}_0$ si y sólo si existe un conjunto abierto contenido en V, el cual contiene a $\vec{x}_0$.*

Demostración. En primer lugar, supondremos que V es una vecindad de $\vec{x}_0$. Usando la definición, sabemos que existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, r) \subset V$. Por lo tanto, V contiene a un conjunto abierto, el cual contiene a $\vec{x}_0$.

En segundo lugar, supondremos que V contiene a un conjunto abierto O, el cual contiene a $\vec{x}_0$. Como O es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, r) \subset O \subset V$ y observamos que V satisface la definición de vecindad. □

Una consecuencia de este resultado es una nueva forma de caracterizar a los conjunto abiertos:

[6] Esto viene de las palabras *voisinage* en francés y *neighbourhood* en inglés británico.

COROLARIO 2.1. *Un conjunto es abierto si y sólo si es una vecindad de cada uno de sus elementos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea O un conjunto abierto. Si $\vec{x}_0 \in O$, sabemos que existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}_0, r) \subset O$. Por lo tanto, O es una vecindad de x_0.

Sea $\mathcal{E}$ un conjunto que es vecindad de cada uno de sus elementos. Por lo tanto, ,usando la definición de vecindad, sabemos que para cada $\vec{x} \in \mathcal{E}$ existe una bola abierta con centro en $\vec{x}$ contenida en $\mathcal{E}$. Pero recordemos que esa es la definición de un conjunto abierto, luego $\mathcal{E}$ es un conjunto abierto $\square$

En [**1**, pag.16] se señala lo siguiente: … *las vecindades de un punto son extremadamente numerosas, debido a que todo conjunto que contiene a una vecindad $\vec{x}_0$ se transforma inmediatamente en una vecindad de $\vec{x}_0$. Esta riqueza excesiva puede ser molesta en algunos casos. con el fin de remediar este problema, se propone el concepto de base de vecindades.*

DEFINICIÓN 2.7. *Una base de vecindades de $\vec{x}_0$ es un subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(\vec{x}_0)$ tal que para todo $V \in \mathcal{V}(\vec{x}_0)$ existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset V$.*

El lector verá sin dificultad que el conjunto de bolas abiertas con centro en $\vec{x}_0$ es una base de vecinades de $\vec{x}_0$.

5. Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Una sucesión de vectores de $\mathbb{R}^n$ es una función $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ que a cada número natural $k \in \mathbb{N}$ le asocia un vector $\vec{x}_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)^t$.

DEFINICIÓN 2.8. *Una sucesión $\{\vec{x}_k\}_k$ converge al vector $\vec{L}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > k_0 \Rightarrow ||\vec{x}_k - \vec{L}|| < \varepsilon, \tag{2.6}$$

donde $||\cdot||$ es una norma en $\mathbb{R}^n$. En tal caso se dice que $\vec{L}$ es el límite de la sucesión, lo cual se denota como:

$$\lim_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{L}.$$

TEOREMA 2.2. *Si la sucesión $\{\vec{x}_k\}_k$ tiene límite, este es único.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que

$$\lim_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{L} \quad \text{y} \quad \lim_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{M}$$

y además $\vec{L} \neq \vec{M}$.

Lo cual es equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \Rightarrow ||\vec{x}_k - \vec{L}|| < \varepsilon$$

y

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{K}(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > \tilde{K} \Rightarrow ||\vec{x}_k - \vec{M}|| < \varepsilon.$$

Como $\vec{L} \neq \vec{M}$, podemos elegir $\varepsilon = ||\vec{L} - \vec{M}||/3$. Ahora definimos

$$\hat{K}(\varepsilon) = \max\{K(\varepsilon), \tilde{K}(\varepsilon)\}$$

y se tiene que si $k > K(\varepsilon)$, entonces:

$$||\vec{L} - \vec{M}|| \leq ||\vec{x}_k - \vec{L}|| + ||\vec{x}_k - \vec{M}|| < 2\varepsilon,$$

lo cual es equivalente a $3 < 2$, obteniendo una contradicción. Por lo tanto sabemos que $\vec{L} \neq \vec{M}$. $\square$

PROPOSICIÓN 10. *Si* $||\cdot||$ *y* $||\cdot||'$ *son dos normas en* $\mathbb{R}^n$, *entonces la convergencia de una sucesión a* $\vec{L}$ *en términos de* $||\cdot||$ *es equivalente a la convergencia hacia* $\vec{L}$ *en términos de* $||\cdot||'$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\vec{x}_k$ converge a $\vec{L}$ en términos de la norma $||\cdot||$, entonces sabemos que:

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists K(\tilde{\varepsilon}) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \Rightarrow ||\vec{x}_k - \vec{L}|| < \tilde{\varepsilon}.$$

Por otro lado, gracias al Teorema 1.5 sabemos que existen $c > 0$ y $C > 0$ tales que:

$$c||\vec{x}||' \leq ||\vec{x}|| \leq C||\vec{x}||'.$$

Luego, podemos concluir que

$$\forall \varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{c} > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \Rightarrow ||\vec{x}_k - \vec{L}||' < \varepsilon,$$

lo cual implica que $\vec{x}_k$ converge a $\vec{L}$ en términos de la norma $||\cdot||'$ □

TEOREMA 2.3. *Sea* $\vec{x}_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ *una sucesión de vectores. Entonces la sucesión converge al vector* $\vec{L} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)^t$ *si y sólo si cada componente de la sucesión verifica:*

$$\lim_{k \to +\infty} x_i^k = \ell_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.7}$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar supondremos que:

$$\lim_{k \to +\infty} \vec{x}_k = \vec{L},$$

lo cual es equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \Rightarrow ||\vec{x}_k - \vec{L}||_\infty < \varepsilon.$$

Usando las propiedades de la norma $||\cdot||_\infty$, sabemos que:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall \varepsilon > 0, \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \Rightarrow |x_i^k - \ell_i| < \varepsilon.$$

Es fácil notar que esto equivale justamente a (2.7).

A continuación supongamos que se verifica la propiedad (2.7), lo cual es equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K_i(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \Rightarrow |x_i^k - \ell_i| < \varepsilon.$$

Definamos

$$K = \text{máx}\{K_1(\varepsilon), K_2(\varepsilon), \ldots, K_n(\varepsilon)\}$$

y notemos que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \Rightarrow \max_{i=1,\ldots,n} \{|x_i^k - \ell_i|\} < \varepsilon,$$

que equivale a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \Rightarrow ||\vec{x} - \vec{L}||_\infty < \varepsilon$$

y concluye la demostración. □

Este resultado es muy práctico, debido a que indica que el límite de una sucesión vectorial debe calcularse coordenada a coordenada. Por ejemlo, notemos que:

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(\frac{1}{k^2},1-\frac{1}{k},\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\Big)=(0,1,e).$$

Por otro lado, notemos que el siguiente límite:

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(\frac{1+k}{k},(-1)^k,\frac{(-1)^k}{k}\Big)$$

no existe, debido a que la sucesión $(-1)^k$ correspondiente a la segunda coordenada no es convergente.

Definición 2.9. *Una sucesión de vectores $\{\vec{x}_k\}$ es de Cauchy si:*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists K(\varepsilon)\in\mathbb{N}\quad\text{tal que}\quad k,r>K\Rightarrow||\vec{x}_k-\vec{x}_r||<\varepsilon. \tag{2.8}$$

El siguente resultado muestra un importante ejemplo de sucesión de Cauchy

Teorema 2.4. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Demostración. Si $\vec{x}_k$ es una sucesión convergente a $\vec{L}$, por definición tenemos que:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists K(\varepsilon)\in\mathbb{N}\quad\text{tal que}\quad k>K\Rightarrow||\vec{x}_k-\vec{L}||<\varepsilon/2$$

y

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists K(\varepsilon)\in\mathbb{N}\quad\text{tal que}\quad r>K\Rightarrow||\vec{L}-\vec{x}_r||<\varepsilon/2.$$

Usando la desigualdad triangular, obtenemos que:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists K(\varepsilon)\in\mathbb{N}\quad\text{tal que}\quad k,r>K\Rightarrow||\vec{x}_k-\vec{x}_r||<\varepsilon,$$

lo cual concluye la demostración. □

Otra importante consecuencia del Teorema 2.3 es el siguiente resultado:

Teorema 2.5. *Toda sucesión $\{\vec{x}_k\}$ de Cauchy es convergente.*

Demostración. Usando la norma infinito, sabemos que

$$\begin{array}{llll}\forall\varepsilon>0 & \exists K(\varepsilon)\in\mathbb{N} & \text{tal que}\quad k,r>K & \Rightarrow\quad ||\vec{x}_k-\vec{x}_r||_\infty<\varepsilon\\ \forall\varepsilon>0 & \exists K(\varepsilon)\in\mathbb{N} & \text{tal que}\quad k,r>K & \Rightarrow\quad \max\limits_{i=1,\ldots,n}\{|x_i^k-x_i^r|\}<\varepsilon\end{array}$$

Esto implica que para todo $i=1,\ldots,n$ se cumple que

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists K(\varepsilon)\in\mathbb{N}\quad\text{tal que}\quad k,r>K\quad\Rightarrow\quad|x_i^k-x_i^r|<\varepsilon,$$

lo cual implica que la i–ésima componente x_i^k de la sucesión $\{\vec{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy. Como sabemos que las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$ son convergentes, sabemos que

$$\lim_{k\to+\infty}x_i^k=\ell_i\in\mathbb{R}\quad\forall\quad i=1,\ldots,n.$$

Finalmente, usando el Teorema 2.3 se tiene que:

$$\lim_{k\to+\infty}\vec{x}_k=(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n),$$

lo que concluye la demostración. □

Otra consecuencia del Teorema 2.3 es el siguiente resultado, cuya demostración se deja al lector:

TEOREMA 2.6. *Sean $\vec{x}_k$ e $\vec{y}_k$ dos sucesiones tales que:*

$$\lim_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{L} \quad \text{y} \quad \lim_{k\to+\infty} \vec{y}_k = \vec{M}.$$

(i) $\lim_{k\to+\infty} (\vec{x}_k + \vec{y}_k) = \vec{L} + \vec{M}$.
(ii) $\lim_{k\to+\infty} \lambda\vec{x}_k = \lambda\vec{L}$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}^n$.
(iii) $\lim_{k\to+\infty} \vec{x}_k \cdot \vec{y}_k = \vec{L} \cdot \vec{M}$ *donde* $\cdot$ *es el producto interno estandar.*

DEFINICIÓN 2.10. *Una* ***subsucesión*** $\vec{x}_{\phi(k)}$ *de la sucesión* $\vec{x}_k$ *es una composición de la sucesión original* $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ *(que a cada* $k \in \mathbb{N}$ *asocia el vector* $\vec{x}_k$*) con una función* $\phi\colon \mathbb{N} \to U \subset \mathbb{N}$.

En el diagrama se puede apreciar, que a cada $k \in \mathbb{N}$ se asocia el vector $\vec{x}_{\phi(k)}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\vec{x}_{\phi(\cdot)}"'] & U \arrow[d, "\vec{x}_{\cdot}"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

El siguiente resultado es útil:

LEMA 2.2. *Si* $\vec{x}_k$ *es una sucesión de Cauchy y* $\vec{x}_{\phi(k)}$ *es una subsucesión convergente a* $\vec{L}$*, entonces* $\vec{x}_k$ *converge a* $\vec{L}$.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, sabemos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{K}(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k, r > \tilde{K} \Rightarrow ||\vec{x}_k - \vec{x}_r||_\infty < \varepsilon/2$$

y

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \hat{K}(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > \hat{K} \Rightarrow ||\vec{x}_{\phi(k)} - \vec{L}||_\infty < \varepsilon/2.$$

Elegimos $K = \max\{\tilde{K}, \hat{K}\}$ y usando la desigualdad triangular con $r = \phi(k)$ podemos conlcuir que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k, \phi(k) > K \Rightarrow ||\vec{x}_k - \vec{x}_{\phi(k)}||_\infty < \varepsilon/2$$

y

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \Rightarrow ||\vec{x}_{\phi(k)} - \vec{L}||_\infty < \varepsilon,$$

lo cual implica que $\vec{x}_k$ converge a $\vec{x}$ y se concluye la demostración. □

6. Sucesiones y conjuntos cerrados

Hasta ahora, hemos definido a los conjuntos cerrados de forma residual (es decir, en función de su complemento). El uso de las sucesiones nos permitirá realizar una mejor caracterización de los conjuntos cerrados.

TEOREMA 2.7. *Un conjunto no vacío* $F \subset \mathbb{R}^n$ *es cerrado si y sólo si toda sucesión* $\{\vec{x}_k\}_k$ *convergente de elementos en* F [7] *tiene límite en* F.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, supongamos que F es cerrado. Ahora consideremos una sucesión $\{\vec{x}_k\}_k$ con las siguientes propiedades:

[7] Es decir, $\vec{x}_k \in F$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(i) $\vec{x}_k \in F$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
(ii) $\lim\limits_{k \to +\infty} \vec{x}_k = \vec{L}$.

Tenemos que demostrar que $\vec{L} \in F$ (lo haremos por contradicción). En efecto, si suponemos que $\vec{L} \notin F$ y definimos $O = F^c$, tenemos que $\vec{L} \in O$.

Como O es abierto y $\vec{L} \in O$, la definición de conjunto abierto dice que:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{L}, \varepsilon) \subset O.$$

Además, la propiedad $\lim\limits_{k \to +\infty} \vec{x}_k = \vec{L}$ implica que:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \quad & \Rightarrow \quad ||\vec{x}_k - \vec{L}|| < \varepsilon \\ & \Rightarrow \quad \vec{x}_k \in B_{||\cdot||}(\vec{L}, \varepsilon) \subset O. \end{aligned}$$

Esta última propiedad, combinada con (i) implica que:

$$k > K \Rightarrow \vec{x}_k \in O \cap F = F^c \cap F = \emptyset,$$

lo cual es imposible. Por lo tanto $\vec{L} \in F$.

Ahora, supondremos que toda sucesión $\{\vec{x}_k\}_k$ convergente de elementos en F tiene límite en F. Tenemos que demostrar que F es cerrado (o que $O = F^c$ es abierto).

Si suponemos que O no es abierto, tenemos que

$$\exists \vec{M} \in O = F^c \quad \text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{M}, r) \not\subset O \quad \forall r > 0.$$

Esto puede reescribirse (viendo $r = 1/k$ con $k \in \mathbb{N}$) como:

$$\exists \vec{M} \in O = F^c \quad \text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{M}, \frac{1}{k}) \not\subset O \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Es decir,

$$\begin{array}{llll} \exists \vec{x}_k & \text{tal que} \quad ||\vec{x}_k - \vec{M}|| < \frac{1}{k} & \text{y} & \vec{x}_k \notin O = F^c \\ \exists \vec{x}_k & \text{tal que} \quad ||\vec{x}_k - \vec{M}|| < \frac{1}{k} & \text{y} & \vec{x}_k \in F. \end{array}$$

Notemos que hemos construído una sucesión $\vec{x}_k \in F$ que converge a $\vec{M} \notin F$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto F es cerrado. □

Ejemplo 2.4. *Notemos que el conjunto*

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}\Big\},$$

no es cerrado en $\mathbb{R}^2$. *En efecto, notemos que:*

$$(x_k, y_k) = \Big(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}, \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\Big)$$

es una sucesión en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *y converge a* $(e, e) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Observación 5. *Una consecuencia directa del Teorema 2.7 es que si* $F \subset \mathbb{R}^k$ *es cerrado. Entonces para todo* $\vec{x} \in F$, *existe una sucesión* $\vec{x}_k \in F$ *(*$\forall k \in \mathbb{N}$*) tal que* $\lim\limits_{k \to +\infty} \vec{x}_k = \vec{x}$.

7. Adherencia

DEFINICIÓN 2.11. *Consideremos el subconjunto $P \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es* ***adherente*** *a P si existe una sucesión $\vec{x}_k$ que verifique las siguientes propiedades:*

(a) $\vec{x}_k \in P$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.
(b) $\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{x}$.

El conjunto de puntos adherentes de P se denomina ***adherencia*** *o* ***clausura*** *de P y se denota por $\overline{P}$.*

TEOREMA 2.8. *Dado un subconjunto $P \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que:*

(i) $P \subset \overline{P}$.
(ii) $\overline{P}$ *es cerrado.*
(iii) *P es cerrado si y sólo si $P = \overline{P}$. Es decir, un conjunto es cerrado si y sólo si es igual a su adherencia.*
(iv) *$\overline{P}$ es el cerrado* ***minimal*** *que contiene a P, es decir: para todo conjunto cerrado F que verifique $P \subset F$, se tiene que $\overline{P} \subset F$.*
(v) *La adherencia de una bola abierta es una bola cerrada.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\vec{x} \in P$ y construyamos la sucesión constante $\vec{x}_k = \vec{x}$. Es fácil ver dicha sucesión satisface las propiedades (a) y (b) de la Definición 2.11, por lo tanto $\vec{x} \in \overline{P}$ y se verifica (i).

Para demostrar (ii) usaremos el Teorema 2.7. En efecto, consideremos una sucesión convergente $\vec{x}_k$ tal que $\vec{x}_k \in \overline{P}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ y $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \vec{x}$. Tenemos que demostrar que $\vec{x} \in \overline{P}$.

Como $\vec{x}_k \in \overline{P}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. La definición 2.11 (aplicada a cada término $\vec{x}_k$) implica la existencia de sucesiones $\vec{x}_{k_j} \in P$ convergentes a $\vec{x}_k \in \overline{P}$ cuando $j \to +\infty$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\vec{x}_{1_1} & \vec{x}_{1_2} & \vec{x}_{1_3} & \cdots & \vec{x}_{1_r} & \cdots & \cdots & \to & \vec{x}_1 \in \overline{P} \\
\vec{x}_{2_1} & \vec{x}_{2_2} & \vec{x}_{2_3} & \cdots & \vec{x}_{2_r} & \cdots & \cdots & \to & \vec{x}_2 \in \overline{P} \\
\vec{x}_{3_1} & \vec{x}_{3_2} & \vec{x}_{3_3} & \cdots & \vec{x}_{3_r} & \cdots & \cdots & \to & \vec{x}_3 \in \overline{P} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \to & \cdots \\
\vec{x}_{r_1} & \vec{x}_{r_2} & \vec{x}_{r_3} & \cdots & \vec{x}_{r_r} & \cdots & \cdots & \to & \vec{x}_r \in \overline{P} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vec{x}_{j_1} & \vec{x}_{j_2} & \vec{x}_{j_3} & \cdots & \vec{x}_{j_r} & \cdots & \vec{x}_{j_j} & \to & \vec{x}_j \in \overline{P}
\end{array}$$

Por hipótesis sabemos que $\lim\limits_{r\to+\infty} \vec{x}_r = \vec{x}$ (ver la última columna del diagrama). Es decir:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J(\varepsilon) > 0 \quad \text{tal que} \quad r > J \Rightarrow ||\vec{x}_r - \vec{x}|| < \varepsilon/2. \tag{2.9}$$

Por otro lado, consideremos j fijo (pero suficientemente grande tal que $j > J$) y usemos el hecho de que la sucesión $\{x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3}, \ldots\}$ converge a $\vec{x}_j$. Es decir (miremos la j–ésima fila del diagrama):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_j(\varepsilon) > 0 \quad \text{tal que} \quad r > K_j \Rightarrow ||\vec{x}_{j_r} - \vec{x}_j|| < \varepsilon/2. \tag{2.10}$$

Notemos que el término K_j varía con respecto a j. Supondemos, sin pérdida de generalidad que $K_j > J$ cuando j es arbitrariamente grande.

Ahora, consideraremos la ecuación (2.10) con $r = j$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_j(\varepsilon) > 0 \quad \text{tal que} \quad j > K_j \Rightarrow ||\vec{x}_{j_j} - \vec{x}_j|| < \varepsilon/2. \tag{2.11}$$

Una ciudadosa observación del diagrama sugiere que los términos diagonales $\vec{x}_{j_j} \in P$ también debiesen converger a $\vec{x}$. Es decir,

$$\vec{x}_{j_j} \in P \quad \forall \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \lim_{j\to+\infty} \vec{x}_{j_j} = \vec{x}.$$

En efecto, notemos que (2.9) y (2.11) implican:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_J(\varepsilon) > 0 \quad \text{tal que} \quad j > K_J \quad \Rightarrow \quad & ||\vec{x}_{j_j} - \vec{x}|| \\ & \leq ||\vec{x}_{j_j} - \vec{x}_j|| + ||\vec{x}_j - \vec{x}|| \\ & < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la definición 2.11 se tiene que $\vec{x} \in \overline{P}$ y por lo tanto $\overline{P}$ es cerrado.

Para demostrar (iii), primero supondremos que P es cerrado. Como sabemos que $P \subset \overline{P}$, nos bastará con demostrar la contención $\overline{P} \subset P$.

En efecto sea $\vec{x} \in \overline{P}$, entonces existe una sucesión $\vec{x}_k \in P$ (para todo $k \in \mathbb{K}$) tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \vec{x}$. Como P es cerrado, el Teorema 2.7 implica que $\vec{x} \in P$, por lo tanto hemos visto que

$$\vec{x} \in \overline{P} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \in P,$$

lo cual implica $P = \overline{P}$.

Ahora supondremos que $P = \overline{P}$ y es fácil ver que (ii) implica que P es cerrado.

Para demostrar (iv), consideremos un cerrado F con la propiedad $P \subset F$. Si tenemos un vector $\vec{x} \in \overline{P}$ demostraremos que $\vec{x} \in F$.

En efecto, si $\vec{x} \in \overline{P}$ entonces existe una sucesión $\vec{x}_k \in P \subset F$ (para todo $k \in \mathbb{N}$) tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \vec{x}$.

Como F es cerrado, el Teorema 2.7 implica que $\vec{x} \in F$ y por lo tanto $\overline{P} \subset F$.

Para demostrar (v), denotemos por $\overline{B}$ a la adherencia de la bola abierta $B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)$. Por lo tanto, tenemos que demostrar que $\overline{B} = \overline{B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)}$.

Por un lado, gracias a la observación 2.7, sabemos que $\overline{B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)}$ es un conjunto cerrado que contiene a la bola abierta $B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)$. Ahora, por la propiedad (iv) sabemos que $\overline{B} \subset \overline{B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)}$.

Por otro lado, sabemos que si $\vec{y} \in \overline{B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)}$, existe una sucesión $\vec{x}_k \in B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{y}$. Usando la definición de adherencia, se tiene que $\vec{y} \in \overline{B}$ y por lo tanto $\overline{B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)} \subset \overline{B}$, lo cual concluye la demostración. □

8. Interior

Definición 2.12. *Consideremos el subconjunto $P \subset \mathbb{R}^n$. El conjunto* ***interior*** *de P se denota por:*

$$\operatorname{Int}(P) = \big\{\vec{x} \in P \colon \exists r > 0 \quad \text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{x}, r) \subset P\big\}.$$

El siguiente resultado sintetiza las propiedades del interior de un conjunto:

TEOREMA 2.9. *Dado un subconjunto $P \subset \mathbb{R}^n$ no vacío, se tiene que:*

(i) $\mathrm{Int}(P) \subset P$.
(ii) $\mathrm{Int}(P)$ *es abierto.*
(iii) *P es abierto si y sólo si $P = \mathrm{Int}(P)$. Es decir, un conjunto es abierto si y sólo si es igual a su interior.*
(iv) *$\mathrm{Int}(P)$ es el abierto* ***maximal*** *contenido en P, es decir: para todo conjunto abierto O que verifique $O \subset P$, se tiene que $O \subset \mathrm{Int}(P)$.*
(v) *El interior de una bola abierta es ella misma.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración de (i) es inmediata. En efecto, notemos que la contención $\mathrm{Int}(P) \subset P$ es una consecuencia de la definición 2.12.

Para demostrar (ii) tenemos que verificar que

$$\forall \vec{x} \in \mathrm{Int}(P) \quad \exists r_x > 0 \quad \text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) \subset \mathrm{Int}(P). \tag{2.12}$$

Ahora bien, como $\vec{x} \in \mathrm{Int}(P)$, la definición 2.12 indica la existencia de $r > 0$ tal que $B_{||\cdot||}(\vec{x}, r) \subset P$.

Como el conjunto $B_{||\cdot||}(\vec{x}, r) \subset P$ es abierto, sabemos que:

$$\forall \vec{y} \in B_{||\cdot||}(\vec{x}, r) \quad \exists \delta_y > 0 \quad \text{tal que} \qquad B_{||\cdot||}(\vec{y}, \delta_y) \subset B_{||\cdot||}(\vec{x}, r) \subset P,$$

lo cual implica que $\vec{y} \in \mathrm{Int}(P)$ y por lo tanto se tiene $B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) \subset \mathrm{Int}(P)$.

Para demostrar (iii), supondremos en primer lugar que P es abierto y demostraremos que $P = \mathrm{Int}(P)$, gracias a (i), sólo tenemos que demostrar la contención $P \subset \mathrm{Int}(P)$. En efecto, como P es abierto:

$$\vec{x} \in P \quad \Rightarrow \quad \exists r_x > 0 \quad \text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) \subset P.$$

Usando la definición 2.12, vemos que eso equivale a $\vec{x} \in \mathrm{Int}(P)$ y por lo tanto $P \subset \mathrm{Int}(P)$.

Si suponemos $P = \mathrm{Int}(P)$, sabemos que P es abierto por la propiedad (ii).

Para demostrar (iv) consideremos un abierto $O \subset P$. Notemos que:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in O \quad &\Rightarrow \quad \exists r_x > 0 \quad \text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) \subset O \subset P \\ &\Rightarrow \quad \exists r_x > 0 \quad \text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{x}, r_x) \subset P \\ &\Rightarrow \quad \vec{x} \in \mathrm{Int}\, P. \end{aligned}$$

Luego, concluímos que $O \subset \mathrm{Int}\, P$.

La propiedad (v) es consecuencia de (ii) y (iii).

□

9. Frontera, puntos de acumulación y puntos aislados

DEFINICIÓN 2.13. *Dado un subconjunto $P \subset \mathbb{R}^n$, se dice que la* ***frontera*** *de P es el conjunto de puntos adherentes que no son interiores. La frontera de P se denota por:*

$$\partial P = \overline{P} \setminus \mathrm{Int}(P).$$

EJEMPLO 2.5. *La frontera de la bola abierta $B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)$ es:*

$$\partial B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \colon ||\vec{x} - \vec{x}_0|| = r\}.$$

EJEMPLO 2.6. *Notemos que $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$. En efecto, como $\mathbb{R}^n$ es abierto y cerrado a la vez tenemos que es igual a su interior y su clausura, por lo tanto:*

$$\partial\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \operatorname{Int}\mathbb{R}^n = \emptyset.$$

DEFINICIÓN 2.14. *Dado un subconjunto $P \subset \mathbb{R}^n$, se dice que $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es un* ***punto de acumulación*** *de P si existe una sucesión $\vec{x}_k$ con las siguientes propiedades:*

(i) *$\vec{x}_k \in P$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*
(ii) *$\vec{x}_k \neq \vec{x}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*
(iii) *$\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{x}$.*

El conjunto de los puntos de acumulación de P se denota habitualmente por P'.

El siguiente criterio es muy útil para identificar puntos de acumulación y su demostración se deja como ejercicio al lector:

LEMA 2.3. *El vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es un* ***punto de acumulación*** *de P si:*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad B_{||\cdot||}(\vec{x}, \varepsilon) \cap (P \setminus \{\vec{x}\}) \neq \emptyset.$$

EJEMPLO 2.7. *Consideremos el conjunto:*

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad y = 0 \quad \text{donde} \quad k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Notemos que el origen $(0, 0)$ es el único punto de acumulación de A. En efecto, veamos que

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists \quad K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \to ||(\frac{1}{k}, 0)||_\infty = \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Es decir:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad B_{||\cdot||}(\vec{0}, \varepsilon) \cap (A \setminus \{\vec{0}\}) \neq \emptyset$$

y usando el Lema 2.3 se tiene que $(0, 0) \in A$.

Es interesante notar que todo punto de acumulación es un punto adherente, pero la recíproca no es siempre cierta. Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.15. *Dado un subconjunto $P \subset \mathbb{R}^n$, se dice que $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un* ***punto aislado*** *de P si es un punto adherente que no es de acumulación. Es decir:*

$$\vec{x}_0 \quad \text{es aislado si} \quad \exists\delta > 0 \quad \text{tal que} \quad B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, \delta) \cap P = \{\vec{x}_0\}.$$

LEMA 2.4. *Sea $P \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\overline{P} = P \cup P'$.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, demostremos que $P \cup P' \subset \overline{P}$. En efecto, sea $\vec{x} \in P \cup P'$. Si $\vec{x} \in P$, entonces se tiene que $\vec{x} \in \overline{P}$ (ver propiedades de la adherencia). Por otro lado, si $\vec{x} \in P'$, sabemos que existe una sucesión no constante $\vec{x}_k \in P$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{x}$, por lo tanto $\vec{x} \in \overline{P}$.

Ahora, demostraremos que $\overline{P} \subset P \cup P'$. Sea $\vec{x} \in \overline{P}$, entonces existe $\vec{x}_k \in P$ (para todo $k \in \mathbb{N}$) tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{x}$. Si la sucesión es constante, se tiene que $\vec{x} \in P$, de lo contrario, se tiene que $\vec{x} \in P'$, lo cual concluye la demostración. $\square$

10. Compacidad

El siguiente resultado proporciona una interesante propiedad de las sucesiones convergentes:

LEMA 2.5. *Toda sucesión convergente es acotada. Es decir si $\vec{x}_k$ es convergente, existe $M > 0$ tal que*

$$||\vec{x}_k|| \leq M \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\vec{x}_k$ es una sucesión convergente a $\vec{L}$, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \quad \Rightarrow \quad ||\vec{x}_k - \vec{L}|| < \varepsilon$$

Usando una consecuencia de la desigualdad triangular, sabemos que

$$||\vec{x}_k|| - ||\vec{L}|| \leq ||\vec{x}_k - \vec{L}|| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad k > K.$$

Por lo tanto:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \quad \Rightarrow \quad ||\vec{x}_k|| \leq ||\vec{L}|| + \varepsilon.$$

Luego, podemos concluir que:

$$||\vec{x}_k|| \leq M = \max\{||\vec{x}_1||, ||\vec{x}_2||, \ldots, ||\vec{x}_K||, ||\vec{L}|| + \varepsilon\},$$

lo cual concluye la demostración. □

Es importante enfatizar que el resultado recíproco no es cierto, es decir no toda sucesión acotada es convergente, un ejemplo viene dado por la sucesión:

$$\vec{x}_k = ((-1)^k, (-1)^{2k+1}),$$

la cual es acotada (en efecto, es fácil ver que $||\vec{x}_k||_\infty < 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$) pero no es convergente. Por otro lado, podemos comprobar que la subsucesión $\vec{x}_{2k}$ es convergente. Este hecho motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.16. *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es* ***compacto*** *si toda sucesión $\{\vec{x}_k\}$ de términos en A tiene una subsucesión convergente $\vec{x}_{\phi(k)}$ a un elemento $\vec{x} \in A$.*

TEOREMA 2.10. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces es acotado y cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, demostraremos que A es acotado por contradicción. En efecto, supongamos que A no es acotado, usando la Observación 2, sabemos que:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \vec{x}_k \in A \quad \text{tal que} \quad ||\vec{x}_k|| \geq k.$$

De esta forma, hemos construído una sucesión $\vec{x}_k$ tal que $||\vec{x}_k|| > k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como A es compacto, podemos extraer una subsucesión convergente $\vec{x}_{\phi(k)}$.

Sin pérdida de generalidad, supondremos que $\phi(k)$ es estrictamente creciente y usando el hecho de que las sucesiones convergentes son acotadas, obtenemos las desigualdades:

$$\phi(k) \leq ||\vec{x}_{\phi(k)}|| < M \quad \text{para todo } k \in \mathbb{R},$$

pero como $\phi(k)$ es creciente y diverge a $+\infty$, se obtiene una contradicción.

Ahora, demostraremos que A es cerrado, para ello consideremos una sucesión $\vec{x}_k$ con las propiedades:

(i) $\vec{x}_k \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
(ii) $\lim_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{u}$. Es decir, es convergente y por lo tanto de Cauchy.

Por compacidad de A, sabemos que existe una subsucesión $\vec{x}_{\phi(k)}$ convergente a $\vec{x} \in A$. Como $\vec{x}_k$ es de Cauchy, podemos demostrar (ver Teorema 2.4) que $\vec{x}_k$ converge $\vec{x}$ y la unicidad del límite implica que $\vec{x} = \vec{u} \in A$. Luego, el Teorema 2.7 implica que A es cerrado. □

Ahora sabemos que un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado. A continuación veremos que la recíproca de esta afirmación es cierta, es decir, un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ es compacto. Para ello, necesitaremos el siguiente resultado visto en el curso inicial de cálculo:

Teorema 2.11 (Teorema de Bolzano–Weierstrass). *Toda sucesión u_k acotada de números reales tiene una subsucesión convergente u_{ϕ_k}.*

Demostración. Si la sucesión u_k es acotada, entonces existen dos numeros a_0 y b_0 tales que todos los elementos de la sucesión están contenidos en el intervalo $[a_0, b_0]$, es decir:

$$u_k \in I_0 = [a_0, b_0] \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Notemos que el largo del intervalo I_0 es $\ell(I_0) = b_0 - a_0$.

Ahora, subdividimos I_0 en los intervalos:

$$[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}] \quad \text{y} \quad [\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0].$$

Como la sucesión u_k tiene infinitos términos, al menos uno de estos subintervalos debe contener infinitos términos de la sucesión (notemos que la unión de dos conjuntos infinitos no puede ser un conjunto finito). Por lo tanto elegimos un subintervalo que contenga infinitos términos de la sucesión y lo llamaremos $I_1 = [a_1, b_1]$.

Notemos que sea cual sea la elección del subintervalo, la longitud de I_1 será igual a

$$\ell(I_1) = b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

De un modo similar, subdividimos I_1 en los intervalos:

$$[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}] \quad \text{y} \quad [\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1].$$

Como la sucesión u_k tiene infinitos términos en I_1, al menos uno los subintervalos recién definidos debe contener infinitos términos de la sucesión. Por lo tanto, elegimos un subintervalo que contenga infinitos términos de la sucesión y lo llamaremos $I_2 = [a_2, b_2]$.

Es fácil ver que –sea cual sea la elección del subintervalo– la longitud de I_2 será igual a:

$$\ell(I_2) = b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}.$$

Si repetimos este proceso k veces, habremos counstruído un intervalo $I_k = [a_k, b_k]$ de longitud $\ell(I_k) = (b_0 - a_0)/2^k$, el cual contiene infinitos términos de la sucesión.

A continuación construímos la subsucesión $u_{\phi(k)}$, caracterizada por la propiedad $u_{\phi_j} \in I_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, usando la propiedad arquimediana, sabemos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k > K \Rightarrow \quad \frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon,$$

luego, podemos demostrar que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad k, r > K \Rightarrow \quad |u_{\phi(k)} - u_{\phi(r)}| < \varepsilon$$

y podemos observar que $u_{\phi(k)}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto convergente (ver Teorema 2.5). Es decir $\lim\limits_{k \to +\infty} u_{\phi(k)} = u^*$. □

Ahora podemos enunciar un importante resultado:

Teorema 2.12. *Si el subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado, entonces es compacto.*

Demostración. Consideremos una sucesión $\vec{x}_k$ cuyos términos están en el conjunto A. Como A es acotado, la Proposición 1 implica la existencia de $R > 0$ tal que:

$$||\vec{x}_k|| < R \quad \forall \vec{x}_k \in A.$$

Si consideramos la norma infinito y $\vec{x}_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$, notemos que

$$||\vec{x}_k||_\infty = \text{máx}\{|x_1^k|, |x_2^k|, \ldots, |x_n^k|\} < R \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Es decir, cada una de las componentes es una sucesión acotada de números reales debido a que:

$$|x_i^k| < R \quad \text{para todo} \quad i = 1, \ldots, n \quad \text{y todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Si aplicamos el teorema de Bolzano–Weierstrass a la primera componente de la sucesión $\vec{x}_k$, tenemos que existe una subsucesión $x_1^{\phi_1(k)}$ tal que $\lim\limits_{k \to +\infty} x_1^{\phi_1(k)} = x_1^*$.

Al considerar la subsucesión:

$$\vec{x}_{\phi_1(k)} = (x_1^{\phi_1(k)}, x_2^{\phi_1(k)}, \ldots, x_n^{\phi_1(k)}),$$

solo sabemos que su primera componente converge, pero carecemos de información suficiente para las restantes. Sin embargo, sabemos que la sucesión de números reales $x_2^{\phi_1(k)}$ es acotada (la subsucesión de una sucesión acotada también es acotada) y podemos aplicar una vez más el teorema de Bolzano–Weiestrass. Es decir, sabemos que existe una subsucesión:

$$x_2^{(\phi_2 \circ \phi_1)(k)} \quad \text{tal que} \quad \lim_{k \to +\infty} x_2^{(\phi_2 \circ \phi_1)(k)} = x_2^*.$$

Al considerar la sub-subsucesión:

$$\vec{x}_{(\phi_2 \circ \phi_1)(k)} = (x_1^{(\phi_2 \circ \phi_1)(k)}, x_2^{(\phi_2 \circ \phi_1)(k)}, \ldots, x_n^{(\phi_2 \circ \phi_1)(k)}),$$

solo sabemos que su primeras dos componentes convergen respectivamente a x_1^* y x_2^*[8], pero carecemos de información suficiente de las $n-2$ coordenadas restantes. Como antes, sabemos que la sucesión de números reales $x_3^{(\phi_2 \circ \phi_1)(k)}$

[8]Usamos el hecho de que si una sucesión es convergente, todas sus subsucesiones tienen el mismo límite.

es acotada, podemos aplicar una vez más el teorema de Bolzano–Weiestrass. Es decir, sabemos que existe una subsucesión:

$$x_3^{(\phi_3\circ\phi_2\circ\phi_1)(k)} \quad \text{tal que} \quad \lim_{k\to+\infty} x_3^{(\phi_3\phi_2\circ\phi_1)(k)} = x_3^*$$

y Al considerar la sub-sub-subsucesión:

$$\vec{x}_{(\phi_3\circ\phi_2\circ\phi_1)(k)} = (x_1^{(\phi_3\circ\phi_2\circ\phi_1)(k)}, \ldots, x_n^{(\phi_3\circ\phi_2\circ\phi_1)(k)}),$$

solo sabemos que su primeras tres componentes convergen respectivamente a x_1^*,x_2^* y x_3^*, pero carecemos de información suficiente de las $n-3$ coordenadas restantes.

Sin embargo, si aplicamos reiteradamente el teorema de Bolzano–Weierestrass a las coordenadas restantes, obtendremos una sub-sub-sub-…-sub-sucesión

$$\vec{x}_{(\phi_n\circ\ldots\circ\phi_1)(k)} = (x_1^{(\phi_n\ldots\circ\phi_1)(k)}, \ldots, x_n^{(\phi_n\ldots\circ\phi_1)(k)}),$$

la cual converge a $\vec{x} = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$.

Por lo tanto, hemos visto que toda sucesión $\vec{x}_k$ en A tiene una subsucesión $\vec{x}_{\phi_n\circ\ldots\circ\phi_1(k)}$ convergente a $\vec{x}$. Como A es cerrado, sabemos además que $\vec{x} \in A$, lo cual demuestra la compacidad de A. □

11. Convexidad

El concepto de convexidad jugará un papel clave en los capitulos siguientes.

DEFINICIÓN 2.17. *Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para todo par de elementos $\vec{x} \in C$ e $\vec{y} \in C$ se verifica que el camino $\vec{\ell}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definido por*

$$\vec{\ell}(t) = (1-t)\vec{x} + t\vec{y}$$

verifica la propiedad:

$$\vec{\ell}(t) \in C \quad \text{para todo} \quad t \in [0,1].$$

Un ejemplo importante de conjunto convexo es el de bola abierta con centro $\vec{x}_0$ y radio $r > 0$. En efecto, notemos que si $\vec{x} \in B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)$ e $\vec{y} \in B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)$ entonces:

$$\begin{array}{rcl} ||t\vec{x} + (1-t)\vec{y} - \vec{x}_0|| & = & ||t\vec{x} + (1-t)\vec{y} - t\vec{x}_0 - (1-t)\vec{x}_0|| \quad \forall \quad t \in [0,1] \\ & = & ||t(\vec{x} - \vec{x}_0) + (1-t)(\vec{y} - \vec{x}_0)|| \\ & \leq & t||\vec{x} - \vec{x}_0|| + (1-t)||\vec{y} - \vec{x}_0|| \\ & < & tr + (1-t)r = r \end{array}$$

y por lo tanto $t\vec{x} + (1-t)\vec{y} \in B_{||\cdot||}(\vec{x}_0, r)$ para todo $t \in [0,1]$.

EJEMPLO 2.8. *Un **Cono** en $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ que satisface las siguientes propiedades:*

i) *Si $\vec{x} \in K$ e $\vec{y} \in K$, entonces $\vec{x} + \vec{y} \in K$.*
ii) *Si $\vec{x} \in K$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda\vec{x} \in K$.*
iii) *Si $\vec{x} \in K$ y $-\vec{x} \in K$, entonces $\vec{x} = \vec{0}$.*

*Es fácil demostrar que todo **cono** K es un conjunto convexo. Además, el lector puede verificar que el conjunto*

$$\mathbb{R}_+^n = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_i \geq 0 \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

es un cono (de hecho, se suele llamarlo, cono positivo*).*

12. Conjuntos G_δ y F_σ

.

En las secciones anteriores vimos que las uniones e intersecciones finitas de conjuntos abiertos (resp. cerrados) eran un conjunto abierto (resp. cerrado). Sin embargo, en el caso de uniones e intersecciones infinitas numerables (ver sección de ejercicios) se puede verifica que la intersección infinita numerable de conjuntos abiertos no siempre es un conjunto abierto y que la unión infinita numerable de conjuntos cerrados no siempre es un conjunto cerrado.

Definición 2.18. *Un conjunto S es G_δ si es la intersección numerable de conjuntos abiertos* [9].

Definición 2.19. *Un conjunto S es F_σ si es la unión numerable de conjuntos cerrados.*

Definición 2.20. *De igual forma:*

i) *Un conjunto es $G_{\delta\sigma}$ si es una unión numerable de conjuntos G_δ.*
ii) *Un conjunto es $F_{\sigma\delta}$ si es una intersección numerable de conjuntos F_σ.*

Ejercicios

1.- Siguiendo las ideas del Ejemplo 2, demuestre que el conjunto

$$\Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 > 0\Big\}$$

es abierto.

2.- Usando el ejercicio anterior, combinado con las propiedades de los conjuntos abiertos. Demuestre que el conjunto

$$C^+ = \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 > 0 \quad \text{y} \quad x_2 > 0\Big\}$$

es abierto.

3.- Usando el Lema 2.1, demuestre que si a un conjunto abierto O se le extrae un número finito de elementos, entonces el conjunto resultante también es un conjunto abierto.

4.- Siguiendo las lineas del caso finito, demuestre que la union de infinitos conjuntos abiertos es un conjunto abierto y que la intersección infinitos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

5.- Encuentre un ejemplo donde la intersección de infinitos conjuntos abiertos no es un conjunto abierto y otro ejemplo donde la unión de infinitos conjuntos cerrados no es un conjunto cerrado.

6.- Demuestre que el conjunto

$$S = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \neq 0\Big\}$$

es abierto en $\mathbb{R}^2$.

[9] Esta notación tien su origen en la lengua alemana: G de *Gebiet* (área o vecindad) y δ de *Durchschnitt* (interseción)

7.- Demuestre que el conjunto

$$S = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq y\Big\}$$

es abierto en $\mathbb{R}^2$.

8.- Demuestre que el conjunto

$$S = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2 < |x| + |y| < 3\Big\}$$

es abierto en $\mathbb{R}^2$.

9.- Demuestre que todo subespacio vectorial V de $\mathbb{R}^n$ es cerrado. Idea: Demuestre que su complemento es abierto. Si $\vec{x}_0 \notin V$. Recuerde que su proyección ortogonal $P_V(\vec{x}_0)$ sobre V verifica $||\vec{x}_0 - P_V(x_0)|| \leq ||\vec{x}_0 - \vec{v})||$ para todo $\vec{v} \in V$.

10.- Demuestre que

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad \text{y} \quad |x|^5 + |y|^5 + |z|^5 \leq 4^5\Big\}.$$

es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^3$.

11.- Sea $n \in \mathbb{N}$ y considere

$$U_n = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = nx\Big\}$$

Demuestre que U_n es cerrado en $\mathbb{R}^2$.

12.- Demuestre que si S es G_δ, entonces S^c es F_σ

Capítulo 3

Límites y Continuidad

1. Límites

Consideremos una función $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ donde Ω es un subconjunto abierto del dominio de f.

Definición 3.1. *Sea $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Se dice que*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0, \vec{x}\in\Omega} f(\vec{x}) = \vec{\ell}$$

si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 < ||\vec{x} - \vec{x}_0||' < \delta \Rightarrow ||f(\vec{x}) - \vec{\ell}|| < \varepsilon \tag{3.1}$$

Es necesario enfatizar que nuestra definición sólo dice que $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, no es necesario que $\vec{x}_0$ pertenezca a Ω. Por otro lado, se sobreentiende que $||\cdot||'$ es una norma en $\mathbb{R}^m$ en la izquierda de (6.1) pero es norma en $\mathbb{R}^n$ en la derecha.

Tambien es muy interesante caracterizar la definición de límites en términos de bolas abiertas. En efecto, la definición de límite (6.1) es equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) > 0 \quad \text{tq} \quad \vec{x} \in B_{||\cdot||'}(\vec{x}_0, \delta) \setminus \{\vec{x}_0\} \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) \in B_{||\cdot||}(\vec{\ell}, \varepsilon). \tag{3.2}$$

Observación 6. *Notemos que si $n = m = 1$, entonces las normas $||\cdot||'$ y $||\cdot||$ son equivalentes al valor absoluto $|\cdot|$ y la desigualdad* (6.1) *se transforma en:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 < |x - x_0| < \delta(x_0, \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

la cual es la definición clásica de límite de función de una variable real (vista en los cursos anteriores).

Notemos que en el caso $m = 1$, x se acerca a *x_0 de dos formas posibles: por la izquierda de x_0 o por la derecha de x_0, eso permite concluir que si los límites laterales:*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

existen y son iguales, entonces f tiene límite en x_0.

Observación 7. *Sin embargo, cuando $m > 1$, existen infinitas formas en las cuales el vector $\vec{x}$* se puede acercar a *$\vec{x}_0$, esto hace el estudio de límites mucho más complicado. Esto es debido a que ya no se puede recurrir al cálculo de límites laterales como en el caso escalar.*

Teorema 3.1. *Si la función $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tiene límite en $\vec{x}_0$, este es único.*

Demostración. Supongamos que $\vec{\ell}_1$ y $\vec{\ell}_2$ son límites de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$ tales que $\vec{\ell}_1 \neq \vec{\ell}_2$, lo cual implica $||\vec{\ell}_1 - \vec{\ell}_2|| > 0$.

Usando la Definición (6.1), tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1(\vec{x}_0, \varepsilon) > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 < ||\vec{x} - \vec{x}_0||' < \delta_1 \Rightarrow ||f(\vec{x}) - \vec{\ell}_1|| < \varepsilon$$

y

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2(\vec{x}_0, \varepsilon) > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 < ||\vec{x} - \vec{x}_0||' < \delta_2 \Rightarrow ||f(\vec{x}) - \vec{\ell}_2|| < \varepsilon.$$

Consideremos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y $\varepsilon = \frac{||\vec{\ell}_1 - \vec{\ell}_2||}{4}$. Usando las dos desigualdades precedentes, se tiene que:

$$||\vec{\ell}_1 - \vec{\ell}_2|| \leq ||f(\vec{x}) - \vec{\ell}_2|| + ||f(\vec{x}) - \vec{\ell}_1|| < \frac{||\vec{\ell}_1 - \vec{\ell}_2||}{2},$$

obteniendo una contradicción. □

Las siguientes propiedades elementales se enuncian sin demostración (la cual se propone como ejercicio para el lector):

Teorema 3.2. *Sean* $\vec{f}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *y* $\vec{g}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *si*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{L}_2,$$

entonces

i) $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x}) = \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) + \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{L}_1 + \vec{L}_2.$

ii) $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \lambda \vec{f}(\vec{x}) = \lambda \vec{L}_1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Concentraremos nuestro estudio en los límites de las funciones de tipo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1.1. Límites de funciones de tipo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: Notemos que, en este caso, la definición (3.1), se puede reescribir como:

Definición 3.2. *Sea* $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. *Se dice que*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0, \vec{x} \in \Omega} f(\vec{x}) = \ell$$

si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 < ||\vec{x} - \vec{x}_0|| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - \ell| < \varepsilon, \tag{3.3}$$

donde $||\cdot||$ *es una norma en* $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 3.1. *La función* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

tiene límite en $(0, 0)$ *y es dado por:*

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Demostraremos este resultado usando la definición. Es decir, debemos demostrar que dado un número $\varepsilon > 0$, *existe un número* $\delta(\varepsilon, \vec{0}) > 0$ *tal que*

$$0 < ||(x, y)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y)| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Antes de continuar nuestro cálculo, notemos que $0 \leq (|x| - |y|)^2 = |x|^2 - 2|xy| + |y|^2$ *es equivalente a la desigualdad:*

$$2|xy| \leq x^2 + y^2 = ||(x,y)||_2^2,$$

y ahora, notemos que:

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

Por lo tanto, la desigualdad (3.4) se verifica considerando $\delta = 2\varepsilon$ *y la norma euclidiana* $||\cdot||_2$.

Ejemplo 3.2. *Notemos que:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} = 0.$$

Usando la definición tenemos que demostrar que dado $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta(\varepsilon, \vec{0}) > 0$ *tal que*

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \Big|\frac{x^4 y}{x^4+y^4}\Big| < \varepsilon.$$

Notemos que $x^4 + y^4 > x^4$ *implica la desigualdad:*

$$\Big|\frac{x^4 y}{x^4+y^4}\Big| < \Big|\frac{x^4 y}{x^4}\Big| = |y| = \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2+y^2} < \delta,$$

por lo tanto, escogiendo $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ *y usando la norma euclidiana* $||\cdot||_2$, *se verifica la definición.*

El ejemplo anterior utilizó la norma euclidiana por simple conveniencia. A veces, otras normas permiten una demostración mas simple.

Ejemplo 3.3. *La función* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \sin(x+y)$$

tiene límite en $(0,0)$ *y es dado por:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(x+y) = 0.$$

Demostraremos este resultado usando la definición. Es decir, debemos demostrar que dado un número $\varepsilon > 0$, *existe un número* $\delta(\varepsilon, \vec{0}) > 0$ *tal que*

$$0 < ||(x,y)||_1 = |x| + |y| < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Antes de continuar nuestro cálculo, notemos que:

$$|f(x,y)| = |\sin(x+y)| \leq |x+y| \leq |x| + |y| = ||(x,y)||_1.$$

Por lo tanto, la desigualdad (3.5) se verifica considerando $\delta = \varepsilon$ *y la norma* $||\cdot||_1$.

Ejemplo 3.4. *La función* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = xy$$

tiene límite en (x_0, y_0) *y es dado por:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} xy = x_0 y_0.$$

Demostraremos este resultado usando la definición. Es decir, debemos demostrar que dado un número $\varepsilon > 0$*, existe un número* $\delta(\varepsilon, \vec{z}_0) > 0$ *–donde* $\vec{z}_0 = (x_0, y_0)$*– tal que*

$$0 < ||(x_0, y_0)||_\infty = \text{máx}\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \delta \Rightarrow |f(x, y)| < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Antes de continuar nuestro cálculo, notemos que:

$$|f(x, y) - x_0y_0| = |xy - x_0y_0| \leq |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \leq |x||y - y_0| + |x - x_0||y_0|.$$

Primero supondremos provisoriamente $\delta = 1$ *(podría ser tan pequeño como se quisiera) y se obtiene:*

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| \leq \text{máx}\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \delta = 1,$$

tras lo cual concluímos que $|x| \leq 1 + |x_0|$ *y reemplazamos en la penúltima desigualdad, obteniendo:*

$$|xy - x_0y_0| \leq |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \leq (1 + |x_0|)|y - y_0| + |x - x_0||y_0|.$$

Ahora olvidamos *el* δ *provisorio igual a* 1 *y usamos las desigualades*

$$|x - x_0| \leq \text{máx}\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \delta \quad \text{y} \quad |y - y_0| \leq \text{máx}\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \delta$$

para concluir que:

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &\leq |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \\ &\leq (1 + |x_0|)|y - y_0| + |x - x_0||y_0| \\ &\leq (1 + |x_0| + |y_0|)\delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la desigualdad (3.6) se verifica considerando

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{1 + |x_0| + |y_0|}\right\}$$

y la norma $||\cdot||_\infty$*. Esta idea de usar diversos deltas es usada regularmente en cálculo de una variable, sugerimos revisar el libro* Calculus *de Michael Spivak (páginas 116–117).*

Ejemplo 3.5. *La función* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

no tiene límite en $(0, 0)$*.*

En efecto, si consideramos las coordenadas $(x, y(x))$ *donde* $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función continua, la cual verifica* $y(0) = 0$*, podemos ver que si* $x \to 0$ *también se verifica* $(x, y(x)) \to (0, 0)$*. Es decir, se verifica la desigualdad izquierda de (6.1).*

Entonces, si el limite existiese (llamémoslo ℓ*), se verificaría que:*

$$\lim_{(x, y(x)) \to (0,0)} \frac{xy(x)}{x^2 + y^2(x)} = \ell$$

para toda función $y(x)$ *con las propiedades descritar anteriormente.*

Ahora bien, consideremos $y_1(x) = 0$*. Notemos que:*

$$\lim_{(x, y_1(x)) \to (0,0)} \frac{0}{x^2} = \ell = 0.$$

Por otro lado, consideremos $y_2(x) = x$. Notemos que:

$$\lim_{(x,y_2(x))\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \ell = \frac{1}{2},$$

lo cual contradice la unicidad del límite.

Ejemplo 3.6. *La función*

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

no tiene límite en $(0,0)$.

Consideremos $y_1(x) = mx$ y observemos (usando la Regla de L'Hôpital) que:

$$\lim_{(x,y_1(x))\to(0,0)} f(x,y(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = 0.$$

Consideremos $y_2(x) = x^2$ y notemos que

$$\lim_{(x,y_2(x))\to(0,0)} f(x,y(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2},$$

lo cual contradice la unicidad del límite.

Ejemplo 3.7. *La función*

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

no tiene límite en $(0,0)$.

En efecto, si consideramos $y(x) = x$ e $y(x) = 0$, obtendremos 0 y 1 como límites respectivos, lo cual contradice la unicidad del límite.

Ejemplo 3.8. *Notemos que el siguiente límite no existe:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^8+y^2}.$$

Consideremos dos caminos $(x,y(x))$ que convergen a $(0,0)$ cuando x converge a cero:

$$y_1(x) = 0 \quad \text{e} \quad y_2(x) = x^4.$$

Entonces:

$$\lim_{(x,y_1(x))\to(0,0)} \frac{0}{x^8+x^2} = 0.$$

Por otro lado:

$$\lim_{(x,y_2(x))\to(0,0)} \frac{x^8}{x^8+x^8} = \lim_{x\to 0} \frac{x^8}{x^8+x^8} = \frac{1}{2},$$

lo cual contradice la unicidad del límite.

Los siguientes propiedades algebraicas de los límites se enuncian sin demostración (la cual es casi igual a aquella vista en el curso inicial de cálculo):

Teorema 3.3. *Sean $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \ell_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}) = \ell_2,$$

entonces

i) $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}) = \ell_1 + \ell_2.$

ii) $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \lambda f(\vec{x}) = \lambda\ell, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$

iii) $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})g(\vec{x}) = \ell_1\ell_2.$

iv) *Si* $\ell_2 \neq 0$, *entonces:*

$$\frac{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x})} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

El siguiente resultado es una consecuencia de la propiedad iii) del resultado anterior. Sin embargo, haremos una demostración formal:

LEMA 3.1. *Si* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es una función de variables separables*

$$f(x,y) = p(x)q(y)$$

donde $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *son tales que*

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = \ell_1 \quad \text{y} \quad \lim_{y\to y_0} q(y) = \ell_2, \tag{3.7}$$

entonces se verifica:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell_1\ell_2. \tag{3.8}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que el segundo límite (3.7), es equivalente a:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_2 > 0 \quad \text{t.q.} \quad |y - y_0| < \delta_2 \Rightarrow |q(y) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2|\ell_1|}.$$

A partir de δ_2, definamos:

$$M = \sup\{q(y)\colon y \in (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)\} = M.$$

El primer límite de (3.7), es equivalente a

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_1 > 0 \quad \text{t.q.} \quad |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |p(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 \quad \text{tq} \quad ||(x - x_0, y - y_0)||_\infty < \delta \quad &\Rightarrow \quad |p(x)q(y) - \ell_1\ell_2| \\ &\leq \quad |p(x)q(y) - \ell_1 q(y) + \ell_1 q(y) - \ell_1\ell_2| \\ &\leq \quad |p(x) - \ell_1||q(y)| + |\ell_1||q(y) - \ell_2| \\ &\leq \quad |p(x) - \ell_1|M + |\ell_1||q(y) - \ell_2|. \end{aligned}$$

Finalmente, usando las desiguadades precedentes, se tiene que:

$$\begin{aligned} \forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 \quad \text{tq} \quad ||(x - x_0, y - y_0)||_\infty < \delta \quad &\Rightarrow \quad |p(x)q(y) - \ell_1\ell_2| \\ &\leq \quad |p(x) - \ell_1|M + |\ell_1||q(y) - \ell_2| \\ . \quad &\leq \quad \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

EJEMPLO 3.9. *La función* $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$g(x,y) = \frac{x^3y^6}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

tiene límite en $(0,0)$ *y es dado por:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^6}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

En efecto, usamos la propiedad iii) del Teorema 3.3 combinada con el resultado anterior:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^6}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^5$$

y –usando los ejemplos anteriores– sabemos que ambos límites son iguales a cero.

Ejemplo 3.10. *La función polinomial*

$$f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^iy^j \quad i,j \in \mathbb{Z}^+$$

tiene limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_0^iy_0^j.$$

En efecto, el Lema 3.1 indica que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} a_{ij}x^iy^j = a_{ij}x_0^iy_0^j.$$

El resultado final es consecuencia de la propiedad i) del Teorema 3.3.

Lema 3.2. *Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función tal que*

$$f(x,y) = p(x)q(y)$$

donde $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son tales que

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = 0 \tag{3.9}$$

y $q(\cdot)$ es una función acotada en $\mathbb{R}$, entonces se verifica:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0. \tag{3.10}$$

Demostración. Como antes, notemos que (3.9) es equivalente a la desigualdad:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |p(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

donde

$$\sup\{q(y)\colon y \in \mathbb{R}\} = M.$$

Notemos que $|x - x_0| \leq \text{máx}\{|x - x_0|, |y - y_0|\} = ||(x - x_0, y - y_0)||_\infty$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad ||(x,y) - (x_0,y_0)||_\infty < \delta \quad \Rightarrow \quad & |p(x)q(y)| \\ & \leq |p(x)|q(y)| \\ & \leq |p(x)|M \\ & \varepsilon,\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

El lector podrá comprobar que si suponemos que $q(\cdot)$ es una función acotada en algún un intervalo abierto que contiene a y_0 (esto es más general que suponer que es acotada en todo $\mathbb{R}$) la demostración es similar. Por otro lado, un importante corolario es el siguiente resultado de cambio de variables:

LEMA 3.3. *Si* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *es una función tal que el cambio de variables*

$$x = r\cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = r\sin(\theta) \quad \text{con} \quad r > 0 \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi) \tag{3.11}$$

aplicado a f *es tal que*

$$f(x, y) = g(r, \theta) = \phi(r)\psi(\theta)$$

donde existe $M > 0$ *tal que* $|\psi(\theta)| \leq M$ *y* $\lim_{r\to 0} \phi(r) = 0$. *Entonces*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = (0, 0).$$

EJEMPLO 3.11. *Notemos que usando el Lema 3.3 permite:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} r^2 \cos^3(\theta)\sin(\theta) = 0,$$

debido a que $|\cos^3(\theta)\sin(\theta)| \leq 1$.

EJEMPLO 3.12. *En el Ejemplo 3.2 vimos (usando la definición) que:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} = 0.$$

Por otro lado, aplicando el Lema 3.3, podemos observar que

$$f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} = r\frac{\cos^4(\theta)\sin(\theta)}{\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)} = g(r, \theta).$$

Por lo tanto, el resultado podría obtenerse mediante el paso a coordenadas polares, previa comprobación de que la función

$$\theta \to \frac{\cos^4(\theta)\sin(\theta)}{\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)},$$

es acotada en θ.

LEMA 3.4. *Sean* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dos funciones tales que* g *es continua en* b *y*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = b.$$

Entonces se verifica:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x, y)) = g(b).$$

DEMOSTRACIÓN. La propiedad

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = b$$

es equivalente a:

$$\forall \eta > 0 \exists \delta(\eta, x_0, y_0) > 0 \quad \text{t.q.} \quad 0 < ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - b| < \eta.$$

Por otro lado, la continuidad de $g(\cdot)$ en b implica que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta(, \varepsilon, b) > 0 \quad \text{tal que} \quad |u - b| < \eta \Rightarrow |g(u) - g(b)| < \varepsilon.$$

Acoplando ambas desigualdades y usando similar $\eta > 0$, se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, x_0, y_0) > 0 \quad \text{t.q.} \quad 0 < ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < \delta \Rightarrow |g(f(x, y)) - g(b)| < \varepsilon,$$

lo cual concluye la demostración.

$\square$

2. Un resultado fundamental

TEOREMA 3.4. *Sea* $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *con coordenadas* $f_1, f_2, \dots, f_n$ *(donde* $f_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$*). Entonces:*

$$\lim_{\vec{u}\to\vec{u}_0} \vec{f}(\vec{u}) = \vec{L} \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{\vec{u}\to\vec{u}_0} f_i(\vec{u}) = \ell_i \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

donde $\vec{L} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$*.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, supongamos que $\lim_{\vec{u}\to\vec{u}_0} \vec{f}(\vec{u}) = \vec{L}$, lo cual es equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, \vec{u}_0) > 0 \quad \text{tq} \quad 0 < ||\vec{u} - \vec{u}_0|| < \delta \Rightarrow ||\vec{f}(\vec{u}) - \vec{L}|| < \varepsilon.$$

Si consideramos la norma infinito, tendremos que

$$|f_i(\vec{u}) - \ell_i| \leq \max_{j=1,\dots,n} \{|f_j(\vec{u}) - \ell_j|\} = ||\vec{f}(\vec{u}) - \vec{L}||_\infty < \varepsilon,$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Por lo tanto, concluímos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, \vec{u}_0) > 0 \quad \text{tq} \quad 0 < ||\vec{u} - \vec{u}_0|| < \delta \Rightarrow |f_i(\vec{u}) - \ell_i| < \varepsilon,$$

lo cual es equivalente a $\lim_{\vec{u}\to\vec{u}_0} f_i(\vec{u}) = \ell_i \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Ahora supondremos que $\lim_{\vec{u}\to\vec{u}_0} f_i(\vec{u}) = \ell_i \quad \forall i = 1, \dots, n$, lo cual implica:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_i(\varepsilon, \vec{u}_0) > 0 \quad \text{tq} \quad 0 < ||\vec{u} - \vec{u}_0|| < \delta \Rightarrow |f_i(\vec{u}) - \ell_i| < \varepsilon.$$

Definimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ usamos la norma infinito en $\mathbb{R}^n$ para concluir que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, \vec{u}_0) > 0 \quad \text{tq} \quad 0 < ||\vec{u} - \vec{u}_0|| < \delta \Rightarrow \max\{|f_i(\vec{u}) - \ell_i|\} < \varepsilon,$$

lo cual implica $\lim_{\vec{u}\to\vec{u}_0} \vec{f}(\vec{u}) = \vec{L}$. □

Ahora, aprovechando la experiencia adquirida calculando límites de funciones $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ podemos calcular límites de funciones $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ calculando coordenada a coordenanda, por elemplo si usamos los resultados anteriores será muy fácil demostrar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin(|x|+|y|), \sin(xy)\Big) = (0,0,0).$$

3. Continuidad

DEFINICIÓN 3.3. *Una función* $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *es:*

(a) ***Continua en*** $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ *si:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) > 0 \quad \text{tal que} \quad ||\vec{x} - \vec{x}_0||' < \delta \Rightarrow ||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)|| < \varepsilon, \tag{3.12}$$

donde $||\cdot||'$ *es una norma en* $\mathbb{R}^m$ *y* $||\cdot||$ *es una norma en* $\mathbb{R}^n$*.*

(b) ***Continua en*** $\Omega \in \mathbb{R}^m$ *si y sólo si es continua en todo* $\vec{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$*.*

OBSERVACIÓN 8. *Notemos que la ecuación* (6.2) *es equivalente a la afirmación:*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0).$$

Por otro lado, la afirmación (6.2) *permite una interesante caracterización la continuidad en términos de bolas abiertas. En efecto, tenemos que $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}_0$ si:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0 \quad \text{tq} \quad \vec{x} \in B_{||\cdot||'}(\vec{x_0}, \delta) \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}) \in B_{||\cdot||}(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon), \tag{3.13}$$

donde la primera bola está definida con la norma $||\cdot||'$ y las segunda bola con la norma $||\cdot||$.

3.1. Continuidad y sucesiones. Es muy útil caracterizar la continuidad mediante sucesiones, ese el objetivo del siguiente resultado:

TEOREMA 3.5. *Una función $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es continua en $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ si y sólo si*

$$\lim_{k\to+\infty} \vec{f}(\vec{x}_k) = \vec{f}(\vec{x}_0) \quad \forall \{\vec{x}_k\} \subset Dom(\vec{f}) \text{ convergente a } \vec{x}_0 \tag{3.14}$$

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar supondremos que $\vec{f}$ es continua, por lo tanto se verifica la propiedad (6.2). Sea $\{\vec{x}_k\}_k \subset Dom(\vec{f})$ una sucesión convergente a $\vec{x}_0$, es decir

$$\forall \delta > 0 \quad \exists K > 0 \quad \text{t.q.} \quad ||\vec{x}_k - \vec{x}_0||' < \delta \quad \text{para todo} \quad k > K. \tag{3.15}$$

Esta desigualdad, combinada con (6.2) implica:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K > 0 \quad \text{t.q.} \quad ||\vec{f}(\vec{x}_k) - \vec{f}(\vec{x}_0)|| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad k > K,$$

lo cual es equivalente a $\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{f}(\vec{x}_k) = \vec{f}(\vec{x}_0)$.

Ahora, supondremos que la propiedad (3.14) se verifica y demostraremos que $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}_0$ por contradicción. En fecto, si no se verificase (6.2), se tendría que:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad ||\vec{x} - \vec{x}_0||' < \delta \quad \text{y} \quad ||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)|| \geq \varepsilon \quad \forall \delta > 0.$$

Ahora, sea $\{\vec{x}_k\}_k \subset Dom(\vec{f})$ una sucesión convergente a $\vec{x}_0$. Es decir, se verifica la propiedad (3.15), lo cual implicaría

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad ||\vec{x}_k - \vec{x}_0||' < \delta \quad \text{y} \quad ||\vec{f}(\vec{x}_k) - \vec{f}(\vec{x}_0)|| \geq \varepsilon \quad \forall \delta > 0, k > K,$$

lo cual es incompatible con (3.14). Por lo tanto, $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}_0$. □

3.2. Propiedades algebraicas. El siguiente resultado se enuncia para funciones $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

TEOREMA 3.6. *Sean $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f y g son continuas en $\vec{x}_0$, entonces*

i) *$f + g$ s continua en $\vec{x}_0$,*
ii) *λf es continua en $\vec{x}_0$,*
iii) *fg es continua en $\vec{x}_0$,*
iv) *Si $g(\vec{x}_0) \neq 0$, entonces f/g es continua en $\vec{x}_0$.*

LEMA 3.5. *Sean $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que si f es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $f(x_0, y_0)$, entonces se verifica que $g \circ f$ es continua en (x_0, y_0).*

Demostración. Notemos que $g \circ f$ es una función $g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ahora, la continuidad de g en $f(x_0, y_0)$ es equivalente a la afirmación:

$\forall\varepsilon > 0 \exists\eta(\varepsilon, f(x_0, y_0)) > 0 \quad \text{tq} \quad |u - f(x_0, y_0)| < \eta \Rightarrow |g(u) - g(f(x_0, y_0))| < \varepsilon.$

La continuidad de f en (x_0, y_0) es equivalente a la afirmación:

$\forall\delta > 0 \exists\nu(\delta, x_0, y_0) > 0 \quad \text{tq} \quad ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < \nu \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \delta.$

Si elegimos $\delta = \eta(\varepsilon, f(x_0, y_0))$ y acoplamos ambas desigualdades, obtenemos

$\forall\varepsilon > 0 \exists\nu(\varepsilon, (x_0, y_0)) > 0 \quad \text{tq} \quad ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < \nu \Rightarrow |g(f(x, y)) - g(f(x_0, y_0))| < \varepsilon.$

□

Ejemplo 3.13. *Notemos que el polinomio en dos variables:*

$$f(x, y) = a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 y + a_5 xy^2 + a_6 x^2 y^2$$

es una función continua en (x_0, y_0)*: En efecto,* f *existe en todo* $\mathbb{R}^2$ *y usando los resultados de límites podemos demostrar que* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Usando el Lema 3.5, es fácil demostrar que las funciones

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sin(a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 y + a_5 xy^2 + a_6 x^2 y^2), \\ q(x, y) &= \arctan(a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 y + a_5 xy^2 + a_6 x^2 y^2), \\ r(x, y) &= \tanh(a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 y + a_5 xy^2 + a_6 x^2 y^2), \end{aligned}$$

son continuas en (x_0, y_0).

3.3. Continuidad y conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Para toda función $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y todo par de conjuntos $A \subset \mathbb{R}^m$ y $B \subset \mathbb{R}^n$ definiremos los conjuntos:

$$\vec{f}(A) = \Big\{ f(\vec{x})\colon \vec{x} \in A \Big\} = \Big\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^n \colon \exists \vec{x} \in A \quad t.q. \quad f(\vec{x}) = \vec{y} \Big\} \tag{3.16}$$

$$\vec{f}^{-1}(B) = \Big\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^m\colon \quad f(\vec{x}) \in B \Big\}, \tag{3.17}$$

este último no debe entender como función inversa. Esta notación no significa que $\vec{f}$ sea invertible, sólo intenta caracterizar la imagen recíproca de B sobre $\vec{f}$.

Observación 9. *Es interesante notar alguas consecuencias sencillas de (3.16) y (3.17):*

$$\vec{f}(\vec{u}) \in B_{||\cdot||}(\vec{f}(\vec{x}_0), r) \quad \text{si y sólo si} \quad \vec{u} \in \vec{f}^{-1}(B_{||\cdot||}(\vec{f}(\vec{x}_0), r)).$$

Por otro lado, si $B \subset C \subseteq \mathbb{R}^n$*, se tiene que:*

$$\vec{f}^{-1}(B) \subseteq \vec{f}^{-1}(C).$$

En efecto, notemos que:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \vec{f}^{-1}(B) \quad &\Rightarrow \quad \vec{f}(\vec{x}) \in B \subset C \\ &\Rightarrow \quad \vec{f}(\vec{x}) \in C \\ &\Rightarrow \quad \vec{x} \in \vec{f}^{-1}(C). \end{aligned}$$

La ecuación (6.2) permite una interesante caracterización la continuidad en términos de bolas. En primer lugar, veremos el siguiete resultado técnico:

LEMA 3.6. *Si la función $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es continua en $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, entonces:*

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon, \vec{x}_0) > 0 \quad \text{tq} \quad B(x_0, \delta) \subseteq \vec{f}^{-1}(B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)). \tag{3.18}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}_0$ podemos usar la definición de imagen recíproca y notar que:

$$\begin{aligned}
\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon, \vec{x}_0) > 0 \quad \text{tq} \quad ||\vec{x} - \vec{x}_0|| < \delta \quad &\Rightarrow \quad ||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)|| < \varepsilon \\
\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon, \vec{x}_0) > 0 \quad \text{tq} \quad \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \quad &\Rightarrow \quad \vec{f}(\vec{x}) \in B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon) \\
\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon, \vec{x}_0) > 0 \quad \text{tq} \quad \vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \quad &\Rightarrow \quad \vec{x} \in \vec{f}^{-1}\big(B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)\big),
\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

El siguiente resultado, tiene una importancia fundamental en el análisis y la topología:

TEOREMA 3.7. *La función $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es continua en $\mathbb{R}^m$ si y sólo si para todo abierto $O \subset \mathbb{R}^n$ se verifica que $f^{-1}(O)$ es un abierto en $\mathbb{R}^m$.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, supondremos que $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es continua en $\mathbb{R}^m$ y que $O \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. Tenemos que demostrar que el conjunto

$$\vec{f}^{-1}(O) = \Big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \quad f(\vec{x}) \in O\Big\},$$

es abierto. Es decir, tenemos que demostrar que:

$$\forall\vec{x}_0 \in \vec{f}^{-1}(O) \quad \exists\delta > 0 \quad \text{tq} \quad B(x_0, \delta) \subset \vec{f}^{-1}(O).$$

Ahora bien, como $\vec{x}_0 \in \vec{f}^{-1}(O)$, se tiene por definición que $\vec{f}(\vec{x}_0) \in O$. Como O es un conjunto abierto, sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon) = \Big\{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : ||\vec{y} - \vec{f}(\vec{x}_0)||' < \varepsilon\Big\} \subset O.$$

Usando la Observación 9, se tiene que:

$$\vec{f}^{-1}(B_{||\cdot||}(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(O).$$

Usando este $\varepsilon > 0$ fijo, usamos el Lema 3.18 y concluímos que existe un $\delta > 0$ tal que

$$B(x_0, \delta) \subseteq \vec{f}^{-1}(B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(O)$$

y por lo tanto, podemos ver que $f^{-1}(O)$ es un conjunto abierto.

Finalmente, supongamos que si para todo $O \subset \mathbb{R}^n$ abierto se tiene que $f^{-1}(O)$ es un abierto en $\mathbb{R}^m$. Tenemos que demostrar que $\vec{f}$ es continua en $\mathbb{R}^m$.

Dado $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, elijamos el abierto $V = B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)$, entonces se tiene que

$$f^{-1}(B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \quad f(\vec{x}) \in B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)\Big\},$$

es un abierto contenido en $\vec{x}_0$, por lo tanto, existe $\delta(\vec{x}_0, \varepsilon) > 0$ tal que

$$B(\vec{x}_0, \delta) \subset f^{-1}(B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)),$$

lo cual es equivalente a:

$$\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \in \vec{f}^{-1}(B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)).$$

Usando (3.17) vemos que esto equivale a:

$$\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad \vec{f}(\vec{x}) \in B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)$$

y la continuidad se deduce de la Definición en términos de bolas (3.13) □

Los siguiente Corolarios son muy importantes:

COROLARIO 3.1. *Si* $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *es continua en* $\mathbb{R}^m$*, entonces el conjunto*

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \colon f(\vec{x}) > r\}$$

es abierto para todo $r \in \mathbb{R}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que $O = (r, +\infty)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Por otro lado, el lector notará fácilmente que:

$$f^{-1}(O) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \colon f(\vec{x}) > r\},$$

el cual es abierto debido al Teorema anterior. □

COROLARIO 3.2. *Si* $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *es continua en* $\mathbb{R}^m$*, entonces el conjunto*

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \colon f(\vec{x}) < r\}$$

es abierto para todo $r \in \mathbb{R}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Usamos $f(\vec{x}) = -g(\vec{x})$ y aplicamos el resultado anterior. □

EJEMPLO 3.14. *Veremos que el conjunto*

$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \ln\big(x^2 + y^2 + \frac{\pi}{2} - \arctan(xz)\big) > 1\Big\}$$

es abierto en $\mathbb{R}^3$*. Para ello, sólo tenemos que verificar que la función*

$$f(x, y, z) = \ln\big(x^2 + y^2 + \frac{\pi}{2} - \arctan(xy)\big)$$

es continua en $\mathbb{R}^3$*. Por un lado, sabemos que los polinomios en varias variables son funciones continuas y por lo tanto* $x^2 + y^2$ *y* xyz *son funciones continuas. Como* $u \mapsto \arctan(u)$ *es una función continua, se tiene que* $\arctan(xz)$ *es una función continua. Ahora, como la suma de funciones continuas es continua, se tiene*

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + \frac{\pi}{2} - \arctan(xy)$$

es continua en $\mathbb{R}^3$*. Finalmente, como* $g(x, y, z) > 0$ *se tiene que* $f(x, y, z)$ *está bien definida la continuidad de la función logaritmica implica la continuidad de* $f(x, y, z)$*.*

Usando el Corolario 3.1, podemos concluir que el conjunto es abierto.

EJEMPLO 3.15. *Notemos que el conjunto:*

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x + 5y - 3xy + x^2y - 8xy^2 + x^2y^2 < 6\Big\}$$

es abierto. En efecto, sabemos que $\mathbb{R}^2$ *es un conjunto abierto y que* $f(x, y) = 2x + 5y - 3xy + x^2y - 8xy^2 + 1x^2y^2$ *es continua en* $\mathbb{R}^2$ *(esto es un caso particular del ejemplo 3.13). Finalmente, aplicamos el Corolario 3.2.*

Teorema 3.8. *Si la función $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es continua en el cerrado $C \subset \mathbb{R}^m$ entonces los conjuntos*

$$\{\vec{x} \in C \subset \mathbb{R}^m \colon f(\vec{x}) \geq r\} \quad r \in \mathbb{R}$$

son cerrados para todo $r \in \mathbb{R}$.

Demostración. Usando la caracterización por sucesiones sabemos que el conjunto es cerrado si y sólo si para toda sucesión $\vec{x}_k$ tal que

$$\vec{x}_k \in C \quad \text{tal que} \quad f(\vec{x}_k) \geq r$$

convergente a $\vec{\ell}$ se verifica $\vec{\ell} \in C$ y $f(\vec{\ell}) \geq r$.

Como C es cerrado, es claro que $\vec{\ell} \in C$. Además, como sabemos que $f(\vec{x}_k) \geq r$, usamos el Teorema 3.5 sabemos que

$$\lim_{k\to+\infty} f(\vec{x}_k) = f(\ell)$$

o bien

$$\begin{array}{llll}
\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 & t.q. & k > N \Rightarrow & |f(x_n) - f(\vec{\ell})| < \varepsilon \\
\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 & t.q. & k > N \Rightarrow & f(\vec{x}_n) - \varepsilon < f(\vec{\ell}) \\
\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 & t.q. & k > N \Rightarrow & r - \varepsilon < f(\vec{\ell}),
\end{array}$$

como la ultima desigualdad no depende de k, sabemos que

$$r - \varepsilon < f(\vec{\ell}) \quad \forall\varepsilon > 0,$$

lo cual implica que $f(\vec{\ell}) \geq r$ y por lo tanto el conjunto es cerrado. □

Corolario 3.3. *Si la función $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es continua en el cerrado $C \subset \mathbb{R}^m$ y $r \in \mathbb{R}$ es un número fijo, entonces:*

i) *El conjunto $\{\vec{x} \in C \subset \mathbb{R}^m \colon f(\vec{x}) \leq r\}$ es cerrado.*
ii) *El conjunto $\{\vec{x} \in C \subset \mathbb{R}^m \colon f(\vec{x}) = r\}$ es cerrado.*

Demostración. En el caso i) construímos la función $g(\vec{x}) = -f(\vec{x})$ y aplicamos el Teorema anterior.

El caso ii) se demuestra usando que $F_r^0 = F_r^+ \cap F_r^-$ y el hecho de que la intersección de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. □

4. Continuidad uniforme

Definición 3.4. *La función $\vec{f}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua en $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ si*

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tal que} \quad ||\vec{x} - \vec{y}||' < \delta \Rightarrow ||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})|| < \varepsilon, \tag{3.19}$$

donde $||\cdot||'$ es una norma en $\mathbb{R}^m$ y $||\cdot||$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.16. *Toda norma $||\cdot||\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua en $\mathbb{R}^m$. En efecto, tenemos que demostrar que:*

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{t.q.} \quad ||\vec{x} - \vec{y}|| < \delta \Rightarrow \left|\ ||\vec{x}|| - ||\vec{y}||\ \right| < \varepsilon.$$

En efecto, una consecuencia de la desigualdad triangular es:

$$\left|\ ||\vec{x}|| - ||\vec{y}||\ \right| \leq ||\vec{x} - \vec{y}||,$$

y la continuidad uniforme se concluye con $\delta = \varepsilon$. Por otro lado, el hecho de que la norma sea una función continua permite afirmar que

$$\lim_{k\to+\infty} \vec{x}_k = \vec{x} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} ||\vec{x}_k|| = ||\vec{x}||.$$

EJEMPLO 3.17. *La funcion $f(x, y) = xy$ no es uniformenmente continua. En efecto, vimos en secciones predecentes que*

$$\delta = \text{mín}\Big\{1, \frac{\varepsilon}{1 + |x_0| + |y_0|}\Big\},$$

es decir, δ no depende exclusivamente de ε sino que del punto donde se está evaluando la continuidad.

5. Functiones definidas sobre conjuntos compactos

En primer lugar, revisaremos el concepto de compacidad y sus propiedades, aportando una nueva perspectiva al concepto.

DEFINICIÓN 3.5. *Una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ es un cubrimiento del conjunto $S \in \mathbb{R}^n$ si*

$$S \subset \cup_{A\in\mathcal{F}} A.$$

En particular, si todos los conjuntos de la familia $\mathcal{F}$ son abiertos, se dice que es un cubrimiento de S por abiertos.

Como ejemplo consideremos un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es fácil notar que:

$$\Omega \subset \bigcup_{\vec{x}\in\Omega} B_{||\cdot||}(\vec{x}, \delta_x) \quad \forall\varepsilon > 0$$

y podemos ver que la expresión de la derecha es un cubrimiento de Ω por abiertos.

DEFINICIÓN 3.6. *Se dice que un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de **Borel–Lebesgue** si todo cubrimiento por δ–abiertos admite un cubrimiento finito, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ y un conjunto finito $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_N\} \subset \Omega$ tal que:*

$$\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_{||\cdot||}(\vec{y}_j, \delta_{y_j}).$$

El siguientes resultado relaciona la propiedad de Borel–Lebesgue con el concepto de compacidad:

TEOREMA 3.9. *Si un subconjunto $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces tiene la propiedad de Borel–Lebesgue.*

DEMOSTRACIÓN. Supondremos que la propiedad de Borel–Lebesgue no se verifica y llegaremos a una contradicción. En efecto, si la propiedad de Borel–Lebesgue no se verifica, entonces se tiene que

$$\exists\vec{x}_1 \in \mathcal{K} \quad \text{tal que} \quad \vec{x}_1 \notin \bigcup_{i=1}^{N} B_i$$

donde B_i es una bola abierta de radio arbitrario (diremos $r = 1/2$).

De igual forma, como Borel–Lebesgue no se verifica, tenemos que

$$\exists \vec{x}_2 \in \mathcal{K} \quad \text{tal que} \quad \vec{x_2} \notin \bigcup_{i=1}^{N} B_i \cup B(\vec{x}_1, 1/2).$$

De un modo recursivo veremos que:

$$\exists \vec{x}_{k+1} \in \mathcal{K} \quad \text{tal que} \quad \vec{x_{k+1}} \notin \bigcup_{i=1}^{N} B_i \cup \bigcup_{j=1}^{k} B(\vec{x}_j, 1/2).$$

En resumen, hemos construído una sucesión $\vec{x}_k$ cuyos terminos (y por lo tanto, también los términos de cualquier subsucesión $\vec{x}_{\phi(k)}$) verifican la propiedad

$$||\vec{x}_k - \vec{x}_r|| > 1/2$$

y por lo tanto, no se puede extraer ninguna subsucesión convergente, lo cual contradice la compacidad de $\mathcal{K}$. □

El resultado recíproco también es cierto, pero se enuncia sin demostración:

Teorema 3.10. *Si un subconjunto $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de Borel–Lebesgue, entonces es compacto.*

Teorema 3.11. *Si $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una función continua en $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$, entonces $\vec{f}$ es uniformemente continua en $\mathcal{K}$.*

Demostración. Tenemos que demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tal que} \quad ||\vec{x} - \vec{y}||' < \frac{\delta}{2} \Rightarrow ||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})|| < \varepsilon.$$

Consideremos a partir de ahora un $\varepsilon > 0$ fijo. Como $\vec{f}$ es continua en $\vec{x} \in \mathcal{K}$, se tiene que:

$$||\vec{z} - \vec{x}|| < \delta(\vec{x}, \varepsilon) \Rightarrow ||\vec{f}(\vec{z}) - \vec{f}(\vec{x})|| < \varepsilon/2.$$

Por otro lado, Notemos que la union de todas las bolas abiertas $B(\vec{x}, \delta_x/2)$ (con $\vec{x} \in \mathcal{K}$) es un cubrimiento de $\mathcal{K}$ por abiertos, es decir:

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{\vec{x} \in \mathcal{K}} B(\vec{x}, \delta_{\vec{x}}/2).$$

donde $\delta_{\vec{x}} = \delta(\vec{x}, \varepsilon)$.

Por la propiedad de Borel–Lebesgue, sabemos que podemos extraer un cubrimiento finito de bolas abiertas:

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(\vec{x}_i, \delta_{\vec{x}_i}/2) \quad \text{donde} \quad \vec{x}_i \in \mathcal{K}.$$

Como $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$, también sabemos que

$$||\vec{z} - \vec{x}_i|| < \delta(\vec{x}_i, \varepsilon) \Rightarrow ||\vec{f}(\vec{z}) - \vec{f}(\vec{x}_i)|| < \varepsilon/2 \tag{3.20}$$

para todo $i = 1, 2, \dots, N$.

Elijamos $\delta > 0$ de la forma:

$$\delta = \min\Big\{\delta_{\vec{x}_i,\varepsilon}\colon i = 1, \dots, N\Big\}.$$

Ahora, observemos que si $||\vec{x}-\vec{y}|| < \delta/2$ (donde $\vec{x},\vec{y} \in \mathcal{K}$), entonces existe $\vec{x}_i$ tal que $||\vec{x}-\vec{x}_i|| < \vec{\delta}_{\vec{x}_i}/2$ lo cual implica que $||\vec{y}-\vec{x}_i|| < \delta$. Usando la desigualdad triangular combinada con (3.20), podemos concluir que:

$$||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})|| \leq ||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_i)|| + ||\vec{f}(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{x}_i)|| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

y que δ solo depende de ε (no depende ni de $\vec{x}$ ni de $\vec{y}$), lo cual implica la continuidad uniforme. □

TEOREMA 3.12. *i* $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *es una función continua en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$ *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^m$*, entonces el conjunto*

$$\vec{f}(\mathcal{K}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \colon \exists \vec{x} \in \mathcal{K} \quad \text{tal que} \quad \vec{y} = \vec{f}(\vec{y})\}$$

es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\vec{y}_k\}$ una sucesión de elementos en $\vec{f}(\mathcal{K})$, tenemos que demostrar que existe una subsucesión $\vec{y}_{\phi(k)}$ convergente a un vector en $\vec{f}(\mathcal{K})$.

En primer lugar, notemos que si $y_k \in \vec{f}(\mathcal{K})$ para todo k, entonces existe una sucesión $\vec{x}_k$ de elementos en $\mathcal{K}$ tal que $\vec{y}_k = \vec{f}(\vec{x}_k)$.

En segundo lugar, como $\mathcal{K}$ es compacto, existe una subsucesión $\vec{x}_{\phi(k)}$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{x}_{\phi(k)} = \vec{x} \in \mathcal{K}$.

Finalmente, esta subsucesión genera la subsucesión $\vec{y}_{\phi(k)} = \vec{f}(\vec{x}_{\phi(k)})$ y la continuidad de $\vec{f}$ (Ver Teorema 3.5) implica que

$$\lim_{k\to+\infty} y_{\phi(k)} = \lim_{k\to+\infty} \vec{f}(\vec{x}_{\phi(k)}) = \vec{f}(\lim_{k\to+\infty} \vec{x}_{\phi(k)}) = \vec{f}(\vec{x}) \in \vec{f}(\mathcal{K}big),$$

lo que concluye la demostración. □

6. Equivalencia de las normas (*)

Ahora tenemos las herramientas necesarias para demostrar la importante propiedad de la equivalencia de las normas en $\mathbb{R}^n$, seguiremos la idea desarrollada en el libro de Kreyzig [**8**] (páginas 72–76)[1]. En primer lugar, se necesitará el siguiente resultado

LEMA 3.7. *Sea* $\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n\}$ *una base de* $\mathbb{R}^n$*. Entonces, existe un número* $c>0$ *tal que para cada elección de escalares* $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ *se tiene que*

$$||\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n|| \geq c(|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|). \tag{3.21}$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos $s = |\alpha_1|+\ldots+|\alpha_n|$. Si $s=0$, entonces $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ y la desigualdad se verifica siempre. Si $s>0$, le desigualdad (3.21) se transforma en

$$||\beta_1\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n\vec{x}_n|| \geq c, \tag{3.22}$$

donde $\beta_i = \alpha_i/s$.

Por lo tanto, es suficiente demostrar la desigualdad (3.22) para todo conjunto de escalares $\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ tales que $\sum|\beta_i| = 1$.

[1]Una demostración mas corta (pero mas dif
icil de seguir) se puede encontrar en el Apéndice del libro de Williamson *et al.* [**14**]

Si suponemos que esta afirmación es falsa, se tiene que para todo $c > 0$ existe un conjunto de escalares $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ tales que

$$||\beta_1\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n\vec{x}_n|| < c \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1.$$

Esto implica la existencia de una sucesión de vectores

$$\vec{y}_k = \beta_1^k\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n^k\vec{x}_n \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{n} |\beta_i^k| = 1$$

tal que $\lim_{k\to 0} ||\vec{y}_k|| = 0$.

Ahora nos concentraremos en la sucesión de vectores $(\beta_1^k, \ldots, \beta_n^k)^t$, la cual pertence al conjunto

$$A = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^n \colon ||\vec{z}|| = 1\},$$

el cual es cerrado y acotado (entonces Compacto). Por lo tanto, existe una subsucesión convergente $(\beta_1^{\phi(k)}, \ldots, \beta_n^{\phi(k)})^t \to (\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)^t$.

Por lo tanto, se tiene que

$$\lim_{k\to+\infty} \vec{y}_{\phi(k)} = \beta_1^*\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n^*\vec{x}_n = \vec{y} \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{n} |\beta_i^*| = 1.$$

Es fácil ver que al menos un β_i^* debe ser distinto de cero. Además, como $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, se tiene que $\vec{y} \neq \vec{0}$.

Como las normas son continuas, podemos concluir que

$$\lim_{k\to+\infty} \vec{y}_{\phi(k)} = \beta_1^*\vec{x}_1 + \ldots + \beta_n^*\vec{x}_n = \vec{y} \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} ||\vec{y}_{\phi(k)}|| = ||\vec{y}||.$$

Finalmente recordemos que $\vec{y}_{\phi(k)} \to \vec{0}$, lo cual implicaría que $||\vec{y}|| = 0$, luego las propiedades de las normas implican que $\vec{y} = 0$, obteniendo una contradicción con $\vec{y} \neq \vec{0}$. □

Ahora, demostraremos el Teorema 1.5: Sean $|| \cdot ||$ y $|| \cdot ||_0$ dos normas en $\mathbb{R}^n$. Si $\{\vec{e}_1, \cdot, \vec{e}_n\}$ es la base canonica de $\mathbb{R}^n$, se tiene que todo vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ admite la representación:

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n.$$

Aplicando el Lema anterior, sabemos que existe una constante $c > 0$ tal que

$$||\vec{x}|| \geq c(|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|).$$

Por otro lado, si aplicamos la desigualdad triangular, se tiene que

$$||\vec{x}||_0 \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|||\vec{e}_i||_0 = k\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

donde $k = \text{máx}\{||\vec{e}_1||_0, \ldots, ||\vec{e}_n||_0\}$. Por lo tanto, se tiene que

$$\frac{c}{k}||\vec{x}||_0 \leq ||\vec{x}||.$$

Intercambiando el uso de las normas en el procedimiento anterior, obtenemos que

$$||\vec{x}||_0 \geq \tilde{c}(|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|)$$

y

$$||\vec{x}|| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| ||\vec{e}_i|| = \tilde{k} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

donde $\tilde{k} = \text{máx}\{||\vec{e}_1||, \ldots, ||\vec{e}_n||\}$. Finalmente, se tiene que

$$\frac{c}{k} ||\vec{x}||_0 \leq ||\vec{x}|| \leq \frac{\tilde{k}}{\tilde{c}} ||\vec{x}||_0,$$

lo cual concluye la demostración.

Capítulo 4

Derivabilidad

1. Preliminares

Recordemos el concepto de derivada de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en x_0:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

y notemos que –al igual que en el caso de los límites– la variable h se "acerca" a cero sólo por dos direcciones: por la izquierda o por la derecha.

Sin embargo, cuando consideramos funciones del tipo $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, existen infinitas formas en las cuales un vector $\vec{h}$ *se puede acercar a* $\vec{0}$, esto hace el estudio de las derivadas mucho más complicado que en el caso escalar. A continuación veremos como $\vec{h}$ se acerca al origen por los ejes coordenados (derivadas parciales).

Dada una función $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, escribiremos:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_m) \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1,x_2,\ldots,x_m) \end{pmatrix}^T,$$

donde $f_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Definición 4.1. *Dada una función $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, la* ***derivada parcial*** *de su i–ésima función coordenada con respecto a la j–ésima coordenada viene dada por:*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f_i(x_1,x_2,\cdots,x_j+h,\cdots,x_n) - f_i(x_1,x_2,\cdots,x_j,\cdots,x_n)}{h}$$

o su equivalente:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f_i(\vec{x}+h\vec{e}_j) - f_i(\vec{x})}{h}. \tag{4.1}$$

Esta definición puede parecer un poco intimidante. Sin embargo, una lectura profunda de la misma muestra que la derivada parcial de f_i con respecto a la variable x_j se obtiene considerando constantes a las variables diferentes de x_j y derivando solamente con respecto a x_j en el sentido usual de cálculo en una variable.

Ejemplo 4.1. *Considere la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = 2x + 3xy - 5x^2y + y^2$$

Sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 + 3y - 10xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x - 5x^2 + 2y.$$

Ejemplo 4.2. *Considere la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \arctan(x^2 + y^2).$$

Sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4}.$$

Ejemplo 4.3. *Considere la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \sin(x^2 y).$$

Sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy\cos(x^2y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(x^2y)$$

Ejemplo 4.4. *Considere la función $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$f(x,y) = (x^2 + 2xy + \ln(x), \tan(y) + x\cos(y)).$$

Sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y + \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2x,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \cos(y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \sec^2(y) - x\sin(y).$$

Ejemplo 4.5. *La ley de Boyle de gases ideales indica que:*

$$PV = KT,$$

donde V es el volumen de un gas encerrado en un recipiente elástico, P es su presión y T es su temperatura. La constante K se denomina constante de Boltzmann. Si escribimos el volumen del gas en función de su presión y temperatura, obtenemos la función $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$V(P,T) = \frac{KT}{P}.$$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial V}{\partial T}(P,T) = \frac{K}{P} \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial P}(P,T) = -\frac{KT}{P^2}.$$

Ejemplo 4.6. *El siguiente caso es muy interesante, consideremos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Es fácil demostrar que f es discontinua en $(0,0)$ (por que?).
Sin embargo, calculamos sus derivadas parciales en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h(0)}{h^2+0^2} - 0}{h} = 0,$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(0)h}{0+h^2} - 0}{h} = 0.$$

Este ejemplo es interesante pues se obtiene el resultado de que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *existen pero* $f(x,y)$ *no es continua en* $(0,0)$*.*

1.1. Matriz jacobiana. Una herramienta importante que se puede construir con las derivadas parciales es la **matriz jacobiana**, la cual definimos a continuación:

Definición 4.2. *Sea* $\vec{f}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *(Ω es abierto en $\mathbb{R}^m$). Cuando las derivadas parciales de f están definidas en $\vec{x}_0 \in \Omega$, la matriz de n filas y m columnas:*

$$Df(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_m}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_3}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\vec{x}_0) \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

se conoce como ***matriz jacobiana*** *de* $\vec{f}$ *en* $\vec{x}_0$*.*

Definición 4.3. *Al determinante de la matriz jacobiana de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$ se le denomina* ***determinante jacobiano*** *y se denota por*

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}_0) = \det Df(\vec{x}_0). \tag{4.3}$$

Ejemplo 4.7. *Consideremos el campo vectorial* $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*:*

$$\vec{F}(x,y,z) = \Big(z + x^2 y, \sin(x+y^3), \arctan(z+xy)\Big).$$

Usando la Definición 4.2, se tiene que

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & 1 \\ \cos(x+y^3) & 3y^2\cos(x+y^3) & 0 \\ \frac{y}{1+(z+xy)^2} & \frac{x}{1+(z+xy)^2} & \frac{1}{1+(z+xy)^2} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.8. *Consideremos el campo escalar* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definido por:*

$$f(x,y,z) = zx + \cos(yz).$$

La matriz jacobiana es:

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} z & -z\sin(yz) & x - y\sin(yz) \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4.9. *Consideremos la transformación lineal* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*:*

$$T(x,y,z) = \Big(z + x - y, x - y - z, x + y/2\Big).$$

Luego, obtenemos que:

$$DT(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una revisión cuidadosa del curso de álgebra lineal mostrará que $DT(x, y, z)$ es la matriz representante de la transformación T [1] *con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.*

2. El caso escalar revisitado

Sea $f\colon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (con $\delta > 0$), en los cursos anteriores se dice que la función f es **diferenciable** en x_0 si existe el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0), \tag{4.4}$$

el cual se denomina la derivada de f en $x = x_0$.

Nuestro objetivo es generalizar esta definición al contexto de funciones de varias variables. Para ello, será muy conveniente reinterpretar la definición dada por el límite (4.4).

Primero construyamos la función auxiliar:

$$\phi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0), \tag{4.5}$$

la cual sabemos que existe y verifica $\phi(h) \to 0$ cuando $h \to 0$.

Multiplicamos (4.5) por h y obtenemos:

$$h\phi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h,$$

ahora reordenamos los términos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \phi(h)h.$$

Ahora, definimos las funciones $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $r\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$:

$$L(h) = f'(x_0)h \quad \text{y} \quad r(h) = \phi(h)h. \tag{4.6}$$

Es fácil observar que L es una transformación lineal y que $r(\cdot)$ verifica:

$$\lim_{h \to +\infty} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Por lo tanto, ahora podemos formular una definición alternativa de función diferenciable en x_0:

Definición 4.4. *La función $f\colon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\delta > 0$) es* ***diferenciable*** *en x_0 si existe una transformación lineal $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y una función $r\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, las cuales satisfacen la ecuación:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + r(h) \tag{4.7}$$

donde $r(\cdot)$ satisface

$$\lim_{h \to +\infty} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{4.8}$$

Además, la trasformación L se denomina la ***diferencial*** *de f y $L(1)$ es la* ***derivada*** *de f en x_0*[2]*.*

La Definición 4.4 presenta una complejidad mayor a la anterior, pero permitirá generalizar el concepto de derivabilidad a funciones de varias variables.

---

[1] Esto no es una casualidad y en las secciones posteriores veremos que tiene gran importancia.

[2] En todo caso, esta definición no es uniforme en la literatura

3. Una definición formal

DEFINICIÓN 4.5. *La función* $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *(*Ω *abierto en* $\mathbb{R}^m$*) es* ***diferenciable*** *en* $\vec{x}_0 \in \Omega$ *si existe una transformación lineal* $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *y una función* $\vec{r}\colon B(\vec{0},\delta) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$*, las cuales satisfacen la ecuación:*

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + T(\vec{h}) + \vec{r}(\vec{h}) \tag{4.9}$$

donde $\vec{r}(\cdot)$ *satisface:*

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{r}(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \vec{0}. \tag{4.10}$$

y $||\cdot||$ *es una norma en* $\mathbb{R}^m$*.*

El lector está invitado a revisar la sección 3.6 de [**10**] para revisar los conceptos de función diferenciable en el sentido de Fréchet y en el sentido de Gâteaux.

TEOREMA 4.1. *Sea* $\vec{f}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *(*Ω *abierto en* $\mathbb{R}^n$*) una función* ***diferenciable*** *en* $\vec{x}_0 \in \Omega$*. La matriz representante de* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *con respecto a las bases canónicas de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^m$ *es la* ***matriz jacobiana*** *de* $\vec{f}$ *en* $\vec{x}_0$*.*

Demostración: Si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$, notemos que (4.21) puede reescribirse como:

$$T(\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{r}(\vec{h}). \tag{4.11}$$

Si consideramos el vector $\vec{h} = h\vec{e}_i$ (Sin pérdida de generalidad, supondremos que $h > 0$) y reemplazamos en (4.11), se obtiene:

$$T(h\vec{e}_i) = \vec{f}(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i) - \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{r}(h\vec{e}_i).$$

Como T es una transformación lineal, se tiene que $T(h\vec{e}_i) = hT(\vec{e}_i)$ y al dividir por h obtenemos:

$$T(\vec{e}_i) = \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{h} + \frac{\vec{r}(\vec{h})}{h},$$

lo cual es equivalente a:

$$T(\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} \dfrac{f_1(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i) - f_1(\vec{x}_0)}{h} \\ \dfrac{f_2(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i) - f_2(\vec{x}_0)}{h} \\ \vdots \\ \dfrac{f_m(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i) - f_m(\vec{x}_0)}{h} \end{pmatrix} + \frac{\vec{r}(h\vec{e}_i)}{h}. \tag{4.12}$$

Hacemos tender $h \to 0$ en (4.12):

$$\lim_{h\to 0} T(\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f_1(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i) - f_1(\vec{x}_0)}{h} \\ \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f_2(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i) - f_2(\vec{x}_0)}{h} \\ \vdots \\ \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f_m(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i) - f_m(\vec{x}_0)}{h} \end{pmatrix} + \lim_{h\to 0} \frac{r(\vec{e}_i)}{h}.$$

Luego, como $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$, las ecuaciones (4.10) y (4.1) combinadas con $||\vec{e}_i||_2 = 1$ implican que:

$$T(\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}_0)\vec{e}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\vec{x}_0)\vec{e}_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}_0)\vec{e}_m.$$

Por lo tanto, la i–ésima columna de la matriz representante de T, esta compuesta por las derivadas parciales $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Teorema 4.2. *Si $\vec{f} \colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (Ω abierto en $\mathbb{R}^m$) una función **diferenciable** en $\vec{x}_0 \in \Omega$, entonces la transformación lineal $T \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de la ecuación* (4.21) *es única.*

Demostración. Supongamos que existen dos transformaciones lineales $T_i \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2)$ tales que:

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + T_1(\vec{h}) + \vec{r}_1(\vec{h}) \tag{4.13}$$

y

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + T_2(\vec{h}) + \vec{r}_2(\vec{h}). \tag{4.14}$$

Donde se tiene que (por definición de diferenciabilidad):

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\vec{r}_i(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \vec{0}, \quad \text{para} \quad i = 1, 2. \tag{4.15}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos:

$$T_1(\vec{h}) - T_2(\vec{h}) = \vec{r}_2(\vec{h}) - \vec{r}_1(\vec{h}). \tag{4.16}$$

Si dividimos por $||\vec{h}||$ y usamos la linealidad de T_1 y T_2 se obtiene:

$$T_1\left(\frac{\vec{h}}{||\vec{h}||}\right) - T_2\left(\frac{\vec{h}}{||\vec{h}||}\right) = \frac{\vec{r}_2(\vec{h})}{||\vec{h}||} - \frac{\vec{r}_1(\vec{h})}{||\vec{h}||}.$$

y tenemos que

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} T_1\left(\frac{\vec{h}}{||\vec{h}||}\right) - T_2\left(\frac{\vec{h}}{||\vec{h}||}\right) = \vec{0}. \tag{4.17}$$

Consideremos el caso particular del vector $\vec{h} = t\vec{e}_i$ donde $\vec{e}_i$ es el i–ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Notemos que reemplazando en (4.17) y recordando que $||\vec{e}_i||_2 = 1$ (las bases canónicas son ortonormales) se obtiene:

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{|t|} T_1(\vec{e}_i) - \frac{t}{|t|} T_2(\vec{e}_i) = 0. \tag{4.18}$$

Notemos que esto equivale a

$$\lim_{t \to 0^+} T_1(\vec{e}_i) - T_2(\vec{e}_i) = 0.$$

y

$$\lim_{t \to 0^-} T_2(\vec{e}_i) - T_1(\vec{e}_i)\} = 0.$$

$$T_1(\vec{e}_i) = T_2(\vec{e}_i), \quad \text{para todo} \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.19}$$

Sin embargo, la ecuación (4.19) implica que $T_1(\vec{x}) = T_2(\vec{x})$ para todo $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$.

En efecto, escribimos $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ y gracias a (4.19), se obtiene:

$$T_1(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i T_1(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i T_2(\vec{e}_i) = T_2(\vec{x}),$$

lo cual concluye la demostración. □

La unicidad de la transformación lineal asociada a la ecuación (4.21) motiva a introducir la siguiente definición:

Definición 4.6. *Si $\vec{f} \colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $x_0 \in \Omega$. La transformación lineal (única) de la ecuación* (4.21) *se conoce como la* ***diferencial*** *de la función $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$ y la denotaremos por $D\vec{f}(\vec{x}_0)$. Es decir,*

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + D\vec{f}(\vec{x}_0)\vec{h} + \vec{r}(\vec{h}).$$

Recordemos que dada una transformación lineal $T \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ se tiene la siguiente igualdad:

$$T(\vec{x}) = [T]\vec{x} \quad \text{para todo } \vec{x} \in \mathbb{R}^m, \tag{4.20}$$

donde $[T]$ es la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

El Teorema anterior junto al reciente comentario permiten demostrar el siguiente corolario:

Corolario 4.1. *La función $f \colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (Ω abierto en $\mathbb{R}^n$) es* ***diferenciable*** *en $\vec{x}_0 \in \Omega$ si y sólo si las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)$ existen y además existe una función $r \colon B(\vec{0}, \delta) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que:*

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + D\vec{f}(\vec{x}_0)\vec{h} + \vec{r}(\vec{h}), \tag{4.21}$$

donde $D\vec{f}(\vec{x}_0)$ es la matriz jacobiana de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$ y $\vec{r}(\cdot)$ satisface:

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{r(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \vec{0}. \tag{4.22}$$

Teorema 4.3. *Toda transformación lineal $U \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en todo valor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Además, la transformación lineal $T \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de la ecuación* (4.21) *es igual a U.*

Demostración. Por linealidad de U, se tiene que:

$$U(\vec{x}_0 + \vec{h}) = U(\vec{x}_0) + U(\vec{h}) \tag{4.23}$$

y notemos que la ecuación (4.21) se verifica con $\vec{r}(h) = \vec{0}$. Luego, por la unicidad de la transformación lineal, se tiene que $T = U$. □

4. Ejemplos

Los siguientes ejemplos nos ayudarán a ilustrar la diferenciabilidad de una función:

EJEMPLO 4.10. *La función:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$.

En efecto, notemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

El primer término se obtiene calculando la derivada parcial. Por otro lado, el segundo término se obtiene usando la definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2(0)^2}{h^2+(0)^2}}{h} = 0.$$

Del mismo modo, notamos que:

Notemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ahora consideremos

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) - [\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)] \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = r(\vec{h})$$

y demostremos que converge a cero cuando $(h_1,h_2) \to (0,0)$. *En efecto, notemos que esa expresión es equivalente a:*

$$\frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^2} - [0 \;\; 0] \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^2} = r(\vec{h}).$$

Finalmente, notemos que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(\vec{h})}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}.$$

Para demostrar que este último límite es cero, realizamos el cambio de variable:

$$h_1 = r\cos(\theta) \quad \text{y} \quad h_2 = r\sin(\theta).$$

Notemos que

$$\frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = r\cos^2(\theta)\sin^2(\theta).$$

Finalmente, como $0 \leq \cos^2(\theta)\sin^2(\theta) \leq 1$, *se concluye que (ver Lema 3.3):*

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = \lim_{r\to 0} r\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = 0.$$

EJEMPLO 4.11. *La función* $f(x,y) = x^2y + y$ *es diferenciable en* $(0,0)$. *En efecto, notemos que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 1,$$

luego notemos que:

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) - [\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)] \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = r(\vec{h})$$

es equivalente a

$$h_1^2h_2 + h_2 - [0 \;\; 1] \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1^2h_2 = r(\vec{h})$$

y notemos que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(\vec{h})}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

y realizando el paso a coordenadas polares, notamos que:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(\vec{h})}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{r\to 0} r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) = 0,$$

lo cual demuestra la diferenciabilidad en $(0,0)$.

EJEMPLO 4.12. *La función:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

no es diferenciable en $(0,0)$.

En efecto, recordemos que en el Ejemplo 4.6 verificamos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Por otro lado, notemos que:

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) - [\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)] \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = r(\vec{h})$$

es equivalente a:

$$\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2} - [0 \;\; 0] \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2} = r(\vec{h}).$$

Es fácil ver que el límite:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{r(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

no existe. Por ejemplo, si tomamos el camino $h_1 = h_2 = h \to 0$, *podremos comprobar que el límite no existe.*

EJEMPLO 4.13. *La función*

$$f(x,y) = \sin(xy)$$

es diferenciable en todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

En efecto, notemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = y_0\cos(x_0y_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = x_0\cos(x_0y_0),$$

Por lo tanto, la expresión

$$r(\vec{h}) = f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

es equivalente a:

$$r(\vec{h}) = \sin(x_0y_0+x_0h_2+h_1y_0+h_1h_2) - \sin(x_0y_0) - h_1y_0\cos(x_0,y_0) - h_2x_0\cos(x_0y_0)$$

Ahora, tenemos que verificar que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{r(\vec{h})}{||\vec{h}||} = 0.$$

Si usamos la norma euclidiana, esto equivale a demostrar que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\sin(x_0y_0+x_0h_2+h_1y_0+h_1h_2) - \sin(x_0y_0) - (h_1y_0+h_2x_0)\cos(x_0y_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

Si realizamos los cambios de variable:

$$u_0 = x_0y_0 \quad \text{y} \quad \xi = x_0h_2 + h_1y_0 + h_1h_2,$$

podemos ver que:

$$\sin(x_0y_0+x_0h_2+h_1y_0+h_1h_2) - \sin(x_0y_0) = \sin(u_0+\xi) - \sin(u_0)$$

y además

$$-(h_1y_0+h_2x_0)\cos(x_0y_0) = -(\xi - h_1h_2)\cos(u_0).$$

Ahora, reescribimos el límite anterior

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\sin(u_0+\xi) - \sin(u_0) - (\xi - h_1h_2)\cos(u_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

Si notamos que $\xi \to 0$ *cuando* $(h_1,h_2) \to (0,0)$, *podemos aplicar la aproximación Taylor de orden uno con resto de Lagrange*[3]*:*

$$\sin(u_0+\xi) = \sin(u_0) + \cos(u_0)\xi - \frac{\sin(c)}{2}\xi^2$$

donde $c \in (-\xi, \xi)$.

Ahora notamos que[4]*:*

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{r(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} -\frac{\sin(c)(x_0h_2+h_1y_0+h_1h_2)^2}{2\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \frac{h_1h_2\cos(u_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

se puede obtener fácilmente mediante el paso a coordenadas polares.

[3] Ver Apéndice

[4] Agradezco al alumno que advirtió un leve error en una versión preliminar

EJEMPLO 4.14. *La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

no es diferenciable en $(0,0)$.

En efecto, notemos que las derivadas parciales no están definidas en $(0,0)$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Si calculamos los límites laterales:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

y concluimos que la derivada parcial con respecto a x no existe en $(0,0)$. *De un modo análogo se demuestra que la derivada parcial con respecto a y tampoco existe.*

Leyendo el Corolario 4.1, podemos apreciar que la existencia de las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

es una condición necesaria para la diferenciabilidad. Como ésta no se cumple, podemos concluir que f no es diferenciable en $(0,0)$.

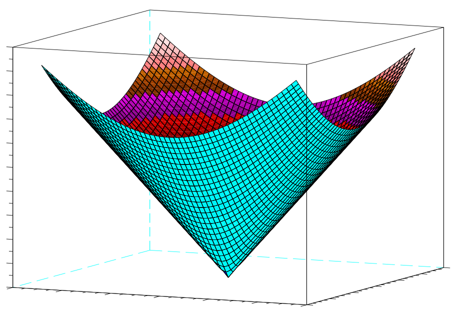

FIGURA 1. Gráfica de la función de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La gráfica de esa función es la de un cono con vértice (groseramente hablando, con una punta afilada) en el origen. Ese es un caso muy importante de no diferenciabilidad en un punto.

EJEMPLO 4.15. *La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$. *Pero sus derivadas parciales* ***no*** *son continuas.*

Calculemos las derivadas parciales en $(0,0)$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0,$$

donde este límite se obtiene por el teorema del sandwich. En síntesis:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0.$$

De igual forma (los cálculos se dejan para el lector) se demuestra que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Notemos que:

$$f(h_1,h_2)-f(0,0)-[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)]\begin{pmatrix} h_1\\ h_2\end{pmatrix}=r(\vec{h})$$

es equivalente a:

$$(h_1^2+h_2^2)\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\Big)-[0\ \ 0]\begin{pmatrix} h_1\\ h_2\end{pmatrix}=(h_1^2+h_2^2)\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\Big)=r(h_1,h_2).$$

Notemos que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{r(h_1,h_2)}{||(h_1,h_2)||}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\Big)=0,$$

lo cual implica la diferenciabilidad en $(0,0)$*.*

Sin embargo, si calculamos las derivadas parciales de f *obtenemos:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} 2x\sin\big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\big) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} 2y\sin\big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\big)-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\big) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Es interesante ver (revisar los ejercicios 19 y 20 del Capítulo anterior) que estas funciones no son continuas en $(0,0)$*. Es decir, este es un ejemplo de función diferenciable en* $(0,0)$ *cuyas derivadas parciales no son continuas en* $(0,0)$*.*

Ejemplo 4.16. *Si* $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *es tal que*

$$|f(\vec{x})|\leq K||\vec{x}||^\theta, \quad \text{donde} \quad \text{y} \quad K>0,\theta>1$$

donde $||\cdot||$ *es una norma, entonces* f *es diferenciable en el origen.*

En primer lugar, notemos que

$$0\leq|f(\vec{0})|\leq K||\vec{0}||^\theta$$

y por las propiedades de las normas conluímos que $|f(\vec{0})|=f(\vec{0})=0$*.*

Sea $\vec{e}_i$ *el i–ésimo vector de la base canónica de* $\mathbb{R}^n$ *(*$i=1,\dots,n$*), por lo tanto:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{0}) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{0}+t\vec{e}_i)-f(\vec{0})}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t\vec{e}_i)}{t}.\end{aligned}$$

Notemos (usando propiedades de las normas y valor absoluto) que

$$-K|t|^\theta||\vec{e}_i||^\theta\leq f(t\vec{e}_i)\leq K||t\vec{e}_i||^\theta=K|t|^\theta||\vec{e}_i||^\theta.$$

Si suponemos $t > 0$, esto implica que

$$-K|t|^{\theta-1}||\vec{e}_i||^{\theta} \leq \frac{f(t\vec{e}_i)}{t} \leq K|t|^{\theta-1}||\vec{e}_i||^{\theta},$$

cuando $t > 0$.

Como $\theta > 1$, se tiene que

$$0 = -\lim_{t\to 0^+} K|t|^{\theta-1}||\vec{e}_i||^{\theta} \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t\vec{e}_i)}{t} \leq \lim_{t\to 0^+} K|t|^{\theta-1}||\vec{e}_i||^{\theta} = 0,$$

y se concluye que:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(\vec{0}+t\vec{e}_i) - f(\vec{0})}{t} = 0.$$

De un modo similar, se deduce que

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(\vec{0}+t\vec{e}_i) - f(\vec{0})}{t} = 0,$$

lo cual implica que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{0}) = 0 \quad \forall \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ahora, notemos que

$$f(\vec{0}+\vec{h}) = f(\vec{h}) = f(\vec{0}) + J_f(\vec{0})\vec{h} + r(\vec{h}),$$

donde

$$J_f(\vec{0}) = [\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{0}) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{0})] = [0 \cdots 0].$$

Por lo tanto, se tiene que $f(\vec{h}) = r(\vec{h})$ y se concluye que

$$-K||\vec{h}||^{\theta-1} \leq \frac{f(\vec{h})}{||\vec{h}||} \leq K||\vec{h}||^{\theta-1}.$$

Como $\theta > 1$, podemos concluir que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{r(\vec{h})}{||\vec{h}||} = 0$$

y se demuestra que f es diferenciable en $\vec{0}$.

5. Propiedades de las funciones diferenciables

TEOREMA 4.4. *Sea $f \colon U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, donde U es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$, entonces f es continua en $\vec{x}_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si f es diferenciable en x_0, por definición existe una transformación lineal $T \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y una función $r \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con la propiedad:

$$\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + T(\vec{h}) + \vec{r}(\vec{h}) \quad \text{donde} \quad \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{r}(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \vec{0}.$$

Ahora escribamos $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$, por lo cual la identidad precedente se transforma en

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + T(\vec{x}-\vec{x}_0) + \vec{r}(\vec{x}-\vec{x}_0) \quad \text{donde} \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{r(\vec{x}-\vec{x}_0)}{||\vec{x}-\vec{x}_0||} = \vec{0}.$$

Notemos que $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$, implica que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} ||\vec{x} - \vec{x}_0|| = 0,$$

lo cual nos permite demostrar (ver Teorema 3.3) que:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} r(\vec{x} - \vec{x}_0) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} ||\vec{x} - \vec{x}_0|| \frac{r(\vec{x} - \vec{x}_0)}{||\vec{x} - \vec{x}_0||} = \vec{0}.$$

Por otro lado, es fácil demostrar (debido a la continuidad de las transformaciones lineales) que:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} T(\vec{h}) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} T(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}.$$

Por lo tanto, si hacemos $\vec{x} \to \vec{0}$, los límites (4.15) implican que:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} T(\vec{x} - \vec{x}_0) + \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{r}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{f}(\vec{x}_0),$$

lo cual concluye la demostración. □

Este resultado permite revisar el Ejemplo 4.6, el cual demostraba (usando la definición de diferenciabilidad) que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

no es diferenciable en $(0,0)$.

Ahora lo podemos hacer utilizando el Teorema 4.4. En efecto, si suponemos que f es diferenciable en $(0,0)$, el Teorema 4.4 indicaría que la función es continua en $(0,0)$. Sin embargo, en el Capítulo anterior demostramos que eso no es cierto.

El siguiente resultado (enunciado sin demostración) presenta una condición suficiente que asegura la diferenciabilidad de una función:

Teorema 4.5. *Sea $\vec{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde Ω es un conjunto abierto. Si las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j$ existen en $B(\vec{x}_0, \delta)$ y son continuas en $\vec{x}_0 \in \Omega$, entonces $\vec{f}$ es diferenciable en x_0.*

Ejemplo 4.17. *La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. En efecto, notemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xe^{-(x^2+y^2)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2ye^{-(x^2+y^2)}.$$

Por un lado sabemos que la función $(x,y) \to x^2 + y^2$ es continua (ver Ejemplo 1 de la sección 5), por otro lado sabemos que la función $g(u) = e^{-u^2}$ es continua en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la continuidad de f es una consecuencia del Lema 3.5.

Ejemplo 4.18. *La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \arctan(x^2 + y^2).$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. En efecto, sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4}.$$

Sabemos que las funciones $2x$ *y* $2y$ *son continuas, es fácil demostrar que el polinomio en dos variables* $(x,y) \to 1+x^4+2x^2y^2+y^4$ *es continuo y nunca es igual a* 0 *(el estudiante podrá demostrar que sus valores son mayores o iguales a uno). Por lo tanto, usando la propiedad iv) del Teorema 3.6, se verifica que las derivadas parciales son continuas en cualquier punto de* $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 4.19. *Retomemos el ejemplo 4.13 de la sección anterior: la función*

$$f(x,y) = \sin(xy)$$

y veamos como el Teorema 4.5 da una mayor simplicidad a la demostración de que esta función es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Notemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy),$$

El estudiante no debiese tener problemas para demostrar que las funciones $(x,y) \to \cos(xy)$ *y* $(x,y) \to \sin(x,y)$ *son continuas en* $\mathbb{R}^2$*. Lo cual implica la continuidad de las derivadas parciales y la diferenciabilidad de la función.*

OBSERVACIÓN 10. *Es preciso enfatizar que el Teorema 4.5 sólo proporciona una* ***condición suficiente*** *para la diferenciabilidad en un punto. Es decir, pueden existir funciones derivables en un punto* $\vec{x}_0$ *cuyas derivadas parciales no sean continuas en dicho punto. El estudiante está invitado a verificar que las derivadas parciales del Ejemplo 4.15 no son continuas en* $(0,0)$.

6. Derivadas direccionales

DEFINICIÓN 4.7. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ *un conjunto abierto y* $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$*. La* ***derivada direccional*** *de* $\vec{f}$ *en el punto* $\vec{x}_0 \in \Omega$ *y la dirección* $\vec{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\vec{0}\}$ *es el siguiente límite (cuando existe):*

$$D_{\vec{v}}\vec{f}(\vec{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{h} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\to 0} \frac{f_1(\vec{x}_0+h\vec{v})-f_1(\vec{x}_0)}{h} \\ \vdots \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{f_n(\vec{x}_0+h\vec{v})-f_n(\vec{x}_0)}{h} \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

EJEMPLO 4.20. *Consideremos la función* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 4x$$

y calculemos la derivada direccional de $\vec{f}$ *en el punto* (x_0, y_0) *y dirección* $\vec{u} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$.

$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}}f(x_0,y_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\frac{\sqrt{3}h}{2},y_0+\frac{h}{2})-f(x_0,y_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3(x_0+\frac{\sqrt{3}}{2}h)^2-(y_0+\frac{h}{2})^2+4(x_0+\frac{\sqrt{3}h}{2})-3x_0^2+y_0^2-4x_0}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3\sqrt{3}hx_0+\frac{9}{4}h^2-hy_0-\frac{h^2}{4}+2\sqrt{3}h}{h}\\
&= 3\sqrt{3}x_0-y_0+2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Es interesante notar que la derivada direccional en el punto $\vec{x}_0 \in \Omega$ y la dirección $\vec{e}_j$ $(j=1,\dots,m)$ donde $\vec{e}_j$ es el j–ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^m$ es el conjunto de derivadas parciales con respecto a la j–ésima variable. En efecto

$$D_{\vec{e_j}}\vec{f}(\vec{x}_0)=\begin{pmatrix}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f_1(\vec{x}_0+h\vec{e_j})-f_1(\vec{x}_0)}{h}\\ \vdots\\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{f_n(\vec{x}_0+h\vec{e}_j)-f_n(\vec{x}_0)}{h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{x}_0)\\ \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(\vec{x}_0)\end{pmatrix}.$$

El siguiente resultado relaciona el concepto de diferenciabilidad en el punto $\vec{x}_0$ con el de derivada direccional en el punto $\vec{x}_0$:

Teorema 4.6. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en $\vec{x}_0 \in \Omega$. Entonces existen todas las derivadas direccionales de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$. Finalmente, para toda dirección $\vec{v} \neq \vec{0}$ se tiene que la derivada direccional de $\vec{f}$ en el punto $\vec{x}_0 \in \Omega$ y la dirección $\vec{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\vec{0}\}$ es:*

$$T(\vec{v}) = D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{v}) = D_{\vec{v}}\vec{f}(\vec{x}_0).$$

Demostración. Como $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$, se tiene que:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{\vec{r}(\vec{h})}{||\vec{h}||}=\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0)-D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h})}{||\vec{h}||}=0.$$

Si consideramos $\vec{h} = h\vec{v}$ y recordamos que $D\vec{f}(\vec{x}_0)(h\vec{v}) = hD\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{v})$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \lim_{h\to 0}\tfrac{\vec{f}(\vec{x}_0+h\vec{v})-\vec{f}(\vec{x}_0)-D\vec{f}(\vec{x}_0)(h\vec{v})}{|h|||\vec{v}||}\\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{\vec{f}(\vec{x}_0+h\vec{v})-\vec{f}(\vec{x}_0)-hD\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{v})}{|h|||\vec{v}||}\\
&= \tfrac{1}{||\vec{v}||}\Big\{\lim_{h\to 0}\tfrac{\vec{f}(\vec{x}_0+h\vec{v})-\vec{f}(\vec{x}_0)}{|h|}-\tfrac{h}{|h|}D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{v})\Big\}.
\end{aligned}$$

Si h tiende a cero por la derecha se tiene que:

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \tfrac{1}{||\vec{v}||}\Big\{\lim_{h\to 0^+}\tfrac{\vec{f}(\vec{x}_0+h\vec{v})-\vec{f}(\vec{x}_0)}{h}-D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{v})\Big\}\\
&= \tfrac{1}{||\vec{v}||}\Big\{D_{\vec{v}}\vec{f}(\vec{x}_0)-D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{v})\Big\}.
\end{aligned}$$

Si h tiende a cero por la izquierda, se tiene que:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \tfrac{1}{||\vec{v}||}\Big\{-\lim_{h\to 0^-}\tfrac{\vec{f}(\vec{x}_0+h\vec{v})-\vec{f}(\vec{x}_0)}{h}+D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{v})\Big\}\\ &= \tfrac{1}{||\vec{v}||}\Big\{-D_{\vec{v}}\vec{f}(\vec{x}_0)+D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{v})\Big\},\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

7. Un estudio más profundo del caso escalar

Consideremos la función $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

7.1. Gradiente.

DEFINICIÓN 4.8. *Consideremos la función $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{x}_0 \in \Omega$. Si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$ existen para todo $i = 1, \dots, n$, se puede definir el **gradiente** de f en $\vec{x}_0$ como el vector de $\mathbb{R}^n$:*

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\Big) \tag{4.25}$$

EJEMPLO 4.21. *Considere la función de Cobb–Douglas $P(K, L) = K^3L^5$. Su gradiente es:*

$$\nabla K = \Big(3K^2L^5, 5K^3L^4\Big).$$

EJEMPLO 4.22. *Considere el campo escalar $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por: $f(x, y) = \ln(xy)$:*

$$\nabla f = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$$

EJEMPLO 4.23. *Considere el campo escalar $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por*

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

su gradiente es:

$$\nabla f = \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big)$$

EJEMPLO 4.24. *La fuerza gravitacional sobre una masa puntual m en $\vec{\boldsymbol{r}} = (x, y, z)^t$ producida por otra masa puntual M en el origen de $\mathbb{R}^3$ está definida por la ley de Newton:*

$$\vec{F}(x, y, z) = -GMm\begin{pmatrix}\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\ \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\ \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\end{pmatrix} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{n}$$

donde $r = ||\vec{\boldsymbol{r}}||_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es la distancia al origen y $\hat{n} = \frac{1}{r}\vec{\boldsymbol{r}}$ es un vector unitario en la dirección de $\vec{\boldsymbol{r}}$.

Ahora, definamos

$$V(x, y, z) = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{GMm}{r}.$$

El estudiante puede comprobar que $-\nabla V = \vec{F}$. *Es decir,* $\vec{F}$ *es el negativo del potencial gravitacional* V.

Notemos que si el vector $\vec{\mathbf{r}}$ *varía con respecto al tiempo, es decir* $\vec{\mathbf{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, *entonces la segunda ley de Newton implica:*

$$m\vec{r}''(t) = \frac{GMm\vec{r}(t)}{||\vec{r}(t)||_2^3}.$$

El ejemplo anterior induce una pregunta interesante (de respuesta un tanto díficil): dado un campo de vectores $\vec{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, existe un campo escalar $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla f = \vec{F}?$$

la respuesta es no siempre, pero motiva una definición interesante:

Definición 4.9. *Un campo de vectores* $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es* ***conservativo*** *si existe un campo escalar* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\nabla f = F.$$

además a f *se le denomima el* ***potencial*** *de* $\vec{F}$.

7.2. Gradiente y derivada direccional. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0 \in \Omega$, entonces sabemos que

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) &= f(\vec{x}_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)h_1 + \ldots + \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)h_n + r(\vec{h}) \\ &= f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{h} + r(\vec{h}), \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde $r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisface:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{r(\vec{h})}{||\vec{h}||} = 0. \tag{4.27}$$

Observación 11. *La ecuación* (4.26) *combinada con el Teorema 4.6 implican las siguientes identidades:*

$$Df(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{h} = D_{\vec{h}}f(\vec{x}_0). \tag{4.28}$$

Es decir, la derivada direccional de f *en el punto* $\vec{x}_0$ *y dirección* $\vec{h}$ *es igual al producto escalar entre el gradiente de* f *en* $\vec{x}_0$ *y la dirección* $\vec{h}$.

Ejemplo 4.25. *En el ejemplo 4.20 calculamos la derivada direccional de la función*

$$f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 4x$$

en el punto (x_0, y_0) *y dirección* $\vec{v} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$ *usando la definición. Notemos que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = (6x_0 + 4, -2y_0).$$

Usando la ecuación (4.28), se tiene que:

$$D_{\vec{v}}f(x_0,y_0) = (6x_0 + 4, -2y_0)\cdot(\sqrt{3}/2, 1/2) = 3\sqrt{3}x_0 + 2\sqrt{3} - y_0.$$

Notemos que en este contexto, la derivada direccional de f en el punto $\vec{x}_0$ y dirección $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ define una función del tipo

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^n \to D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0) \in \mathbb{R},$$

por lo tanto, podemos preguntarnos si existe una dirección $\vec{v}$ que maximice el valor de $D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0)$. El siguiente resultado tiene una importancia fundamental:

TEOREMA 4.7. *Consideremos la función* $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *donde* Ω *es un conjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\vec{x}_0 \in \Omega$. *Si* f *es diferenciable en* $\vec{x}_0$ *y* $\nabla f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. *Entonces:*

$$\text{máx}\{|D_{\vec{u}}f(\vec{x}_0)|\colon ||\vec{u}||_2 = 1\} = ||\nabla f(\vec{x}_0)||$$

y tal máximo toma la dirección del gradiente de f *en* $\vec{x}_0$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un vector unitario cualquiera $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, notemos que la ecuación (4.28) junto a la desigualdad de Cauchy–Schwarz implican:

$$\begin{array}{rcl} |D_{\vec{u}}f(\vec{x}_0)| & = & |\nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{u}| \\ & \leq & ||\nabla f(\vec{x}_0)||_2||\vec{u}||_2 \\ & \leq & ||\nabla f(\vec{x}_0)||_2. \end{array}$$

Además sabemos que (en el contexto de la desigualdad de Cauchy–Schwarz), se tiene la igualdad sólo cuando $\nabla f(\vec{x}_0)$ y $\vec{u}$ son linealmente dependientes. Entonces, la derivada direccional de f en el punto $\vec{x}_0$ toma un máximo en la dirección

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(\vec{x}_0)}{||\nabla f(\vec{x}_0)||_2}.$$

□

7.3. Hiperplano tangente.

DEFINICIÓN 4.10. *Consideremos una función* $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *donde* Ω *es un conjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$. *Si* $\vec{f}$ *es diferenciable en* $\vec{x}_0 \in \Omega$, *entonces la ecuación:*

$$z = f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{4.29}$$

describe a un hiperplano en $\mathbb{R}^{m+1}$, *el cual se denomina* ***hiperplano tangente*** *a la superficie definida por la gráfica de* f *en el punto* $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0)) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Una consecuencia notable de la diferenciabilidad[5] de f en $\vec{x}_0$, combinada con la definición de hiperplano tangente dada por (4.29) es que

$$\begin{array}{rcl} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) & = & f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0)(\vec{h}) + r(\vec{h}) \\ f(\vec{x}) & = & \underbrace{f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)}_{=z} + r(\vec{x} - \vec{x}_0), \end{array}$$

por lo tanto, si $\vec{x}$ es *arbitrariamente cercano* a $\vec{x}_0$, se tiene que $r(\vec{x} - \vec{x}_0)$ es arbitrariamente pequenho y por lo tanto, el valor $f(\vec{x})$ puede ser aproximado por el hiperplano tangente (4.29)[6], esta aproximación se denota por:

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + Df(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0).$$

EJEMPLO 4.26. *Consideremos la función* $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. *La ecuación de su plano tangente en* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, *donde* $(x_0, y_0) \neq (0,0)$[7]*:*

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

[5] y el cambio de variable $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{h}$

[6] La precisión de la aproximación no será abordada en este curso pero es objeto de los cursos de análisis numérico.

[7] Hemos visto que esta función no es diferenciable en el origen

Usando la definición, se tiene que la ecuación del plano tangente es:

$$z = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(x - x_0) + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}(y - y_0).$$

Reordenando, se tiene que:

$$z = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}y - \frac{x_0^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} - \frac{y_0^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Simplificando un poco mas, notamos que:

$$z = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}y - \frac{x_0^2 + y_0^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

y concluímos que la ecuación es:

$$z = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}y,$$

es decir, todos los planos tangentes la superficie de un cono pasan por el origen.

Ejemplo 4.27. *Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. La ecuación de su plano tangente en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:*

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2y_0.$$

Usando la definición, se tiene que la ecuación del plano tangente es:

$$z = f(x_0, y_0) + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0).$$

Simplificando un poco:

$$z = f(x_0, y_0) + 2x_0 x + 2y_0 y - 2x_0^2 - 2y_0^2,$$

y se concluye que el plano tangente es:

$$z = 2x_0 x + 2y_0 y - x_0^2 - y_0^2.$$

Ejemplo 4.28. *Consideremos la función $f(x, y) = x^2 - y^2$. La ecuación de su plano tangente en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:*

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2y_0.$$

La ecuación del plano tangente es:

$$z = f(x_0, y_0) + 2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0).$$

Desarrollando un poco, se concluye que el plano tangente es:

$$z = -x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 x - 2y_0 y.$$

Ejemplo 4.29. *Sin usar calculadora, encontraremos una buena aproximación del número $1{,}08^{3{,}98}$. Para ello definamos la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

$$f(x, y) = x^y = e^{\ln(x^y)} = e^{y\ln(x)}$$

y notemos que $1{,}08^{3{,}98}$ es una cantidad cercana *a $f(1, 4)$.*

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}e^{y\ln(x)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)e^{y\ln(x)}.$$

Es fácil ver que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = \frac{4}{1}e^{4\ln(1)} = 4 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \ln(1)e^{4\ln(1)} = 0.$$

Luego, si consideramos $\vec{h} = (h_1, h_2) = (0{,}08, -0{,}02)$*, la ecuación (4.29) implica que*

$$\begin{array}{rcl} 1{,}08^{3{,}98} & = & f(1+h_1, 4+h_2) \\ & \approx & f(1,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,4)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,4)h_2 = 1 + 4(0{,}08) = 1{,}32. \end{array}$$

Notemos que la calculadora da un valor de $1{,}3583965$*, es decir obtenemos un decimal de precisión.*

EJEMPLO 4.30. *Encontraremos una aproximación para la expresión* $4{,}02\sin(\frac{\pi}{2} + 0{,}01)$*. Para ello definamos la función auxiliar:*

$$f(x,y) = x\sin(\frac{\pi}{2} + y).$$

Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(\frac{\pi}{2} + y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(\frac{\pi}{2} + y)$$

y notemos que ellas existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$*. Por lo tanto,* f *es diferenciable en todo punto de* $\mathbb{R}^2$*.*

Notemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4,0) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(4,0) = 4\cos(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Si consideramos $\vec{h} = (h_1, h_2) = (0{,}02, 0{,}01)$*, la ecuación (4.29) implica que:*

$$\begin{array}{rcl} 4{,}02\sin(\frac{\pi}{2} + 0{,}01) & = & f(4+h_1, 0+h_2) \\ & \approx & f(4,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(4,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(4,0)h_2 \\ & = & 4\sin(\frac{\pi}{2}) + 1(0{,}02) = 4{,}02. \end{array}$$

8. Regla de la cadena

Dada una función $\vec{f}\colon \Omega_f \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (Ω_f es abierto en $\mathbb{R}^m$) y una función $\vec{g}\colon \Omega_g \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ($\Omega_g \subset Rec(\vec{f}) \cap Dom(\vec{g}) \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto en $\mathbb{R}^m$). Escribiremos:

(4.30)

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{pmatrix}^T \quad \text{y} \quad \vec{g}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} g_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ g_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ g_k(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{pmatrix}^T$$

donde $f_i\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

Notemos que $(\vec{g} \circ \vec{f})\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ está bien definida cuando $Rec(\vec{f}) \cap Dom(\vec{g}) \neq \emptyset$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[dr, "\vec{g}\circ\vec{f}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\vec{g}"] \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

Teorema 4.8. *Si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0 \in \Omega_f$ y $\vec{g}$ es diferenciable en $\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0) \in \Omega_g$, entonces $(\vec{g}\circ\vec{f})$ es diferenciable en $\vec{x}_0$. Es decir:*

$$(\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{x}_0+\vec{h}) = (\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{x}_0) + D(\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{x}_0)\vec{h} + \vec{r}(\vec{h}) \tag{4.31}$$

donde $D(\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{x}_0) = D\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0))\circ D\vec{f}(\vec{x}_0)$ y

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{r}(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \vec{0}.$$

Demostración. Si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$, usando el Corolario 4.1 se tiene que existe $r_f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) = \vec{f}(x_0) + D\vec{f}(\vec{x_0})(\vec{h}) + \vec{r}_f(\vec{h}) \tag{4.32}$$

y

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{r}_f(\vec{h})}{||\vec{h}||} = 0. \tag{4.33}$$

Del mismo modo, si $\vec{g}$ es diferenciable en $\vec{y}_0$, usando el Corolario 4.1 se tiene que existe $\vec{r}_g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ tal que:

$$\vec{g}(\vec{y}_0+\vec{q}) = \vec{g}(y_0) + D\vec{g}(\vec{y_0})(\vec{q}) + \vec{r}_g(\vec{q}) \tag{4.34}$$

y

$$\lim_{\vec{q}\to\vec{0}} \frac{\vec{r}_g(\vec{q})}{||\vec{q}||} = 0. \tag{4.35}$$

Escogemos $\vec{y}_0$ tal que $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$ y elegimos $\vec{q} = \vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0)$[8]. Reemplazando estos valores en (4.34) se obtiene:

$$\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})) \;=\; \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)) + D\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0))\Big(\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\Big) + \vec{r}_g(\vec{q})$$

Usando la ecuación (4.32), podemos concluir que:

$$\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})) \;=\; \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)) + D\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0))\Big((D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h}) + \vec{r}_f(\vec{h})\Big) + \vec{r}_g(\vec{q})$$

Ahora, usamos la linealidad de $(Dg)(\vec{f}(\vec{x}_0))$ y notamos que:

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})) \;&=\; \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)) + D\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0))\Big((D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h})\Big) + \\ & \quad D\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0))(\vec{r}_f(\vec{h})) + \vec{r}_g(\vec{q}), \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a:

$$\begin{aligned} (\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{x}_0+\vec{h})) \;&=\; (\vec{g}\circ\vec{f})(\vec{x}_0)) + (D\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0))\circ D\vec{f}(\vec{x}_0))(\vec{h}) + \\ & \quad D\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0))(\vec{r}_f(\vec{h})) + \vec{r}_g(\vec{q}), \end{aligned}$$

[8] Notemos que $\vec{q}$ depende de $\vec{h}$

Sea $\vec{r}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\vec{r}(\vec{h}) = D\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0))\vec{r}_f(\vec{h}) + \vec{r}_g(\vec{q})$$

y reemplazando en la última ecuación se obtiene:

$$(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}_0 + \vec{h})) \quad = \quad (\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}_0)) + (D\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)) \circ D\vec{f}(\vec{x}_0))(\vec{h}) + \vec{r}(\vec{h}).$$

Para finalizar la demostración, tenemos que verificar lo siguiente:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{r}(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \vec{0}. \tag{4.36}$$

Para ello, veamos que:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r}(\vec{h})}{||\vec{h}||} &= D\vec{g}\Big(\frac{\vec{r}_f(\vec{h})}{||\vec{h}||}\Big) + \frac{\vec{r}_g(\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0))}{||\vec{h}||} \\ &= D\vec{g}\Big(\frac{\vec{r}_f(\vec{h})}{||\vec{h}||}\Big) + \frac{\vec{r}_g(\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0))}{||\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0))||}\frac{||\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0))||}{||\vec{h}||} \end{aligned}$$

Como $(D\vec{g})$ es lineal y continua, la ecuaciòn (4.33) implica que:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} D\vec{g}\Big(\frac{\vec{r}_f(\vec{h})}{||\vec{h}||}\Big) = D\vec{g}\left(\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{r}_f(\vec{h})}{||\vec{h}||}\right) = \vec{0}.$$

Por otro lado, la ecuación (4.35) implica que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{r}_g(\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0))}{||\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0))||} = \vec{0}.$$

Finalmente, notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{||\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0))||}{||\vec{h}||} &= \frac{||D\vec{f}(\vec{x}_0))(\vec{h})+\vec{r}_f(\vec{h})||}{||\vec{h}||} \\ &\leq \frac{||D\vec{f}(\vec{x}_0))(\vec{h})||}{||\vec{h}||} + \frac{||\vec{r}_f(\vec{h})||}{||\vec{h}||} \\ &\leq \sup_{||\vec{u}||=1} ||D\vec{f}(\vec{x}_0))(\vec{u})|| + \underbrace{\frac{||\vec{r}_f(\vec{h})||}{||\vec{h}||}}_{\to\vec{0}} \end{aligned}$$

es acotado en una bola con centro en el origen. Por lo tanto:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{r}_g(\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0))}{||\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0))||}\frac{||\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0))||}{||\vec{h}||} = \vec{0},$$

□

Ejemplo 4.31. *Consideremos las funciones* $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *y* $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definidas por:*

$$\vec{f}(x,y) = (x^2+1, y^2) \quad \text{y} \quad \vec{g}(u,v) = (u+v, u, v^2).$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[dr, "\vec{p}=\vec{g}\circ\vec{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\vec{g}"] \\ & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

Además, definamos $\vec{p}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *como* $\vec{p} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

En primer lugar, calcularemos la matriz jacobiana de $\vec{p}$ en (x_0, y_0). Para ello, notemos que:

$$D\vec{p}(x_0, y_0) = D\vec{g}(\vec{f}(x_0, y_0))D\vec{f}(x_0, y_0).$$

Notemos que:

$$(D\vec{f})(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 2x_0 & 0 \\ 0 & 2y_0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (D\vec{g})(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix}$$

Si reemplazamos (u, v) por $\vec{f}(x_0, y_0) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) = (x_0^2 + 1, y_0^2)$, se tiene que

$$(D\vec{g})(\vec{f}(x_0, y_0)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2y_0^2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$(D\vec{p})(x_0, y_0) = D\vec{g}(\vec{f}(x_0, y_0))D\vec{f}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2y_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_0 & 0 \\ 0 & 2y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 2x_0 & 0 \\ 0 & 4y_0^3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.32. *Consideremos las funciones $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por:*

$$\vec{f}(x, y) = (xy, 5x, y^3) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)) \quad \text{y} \quad \vec{g}(x, y) = (3x^2+y^2+z^2, 5xyz).$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[dr, "\vec{p}=\vec{g}\circ\vec{f}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\vec{g}"] \\ & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

Además, definamos $\vec{p}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como $\vec{p} = \vec{g} \circ \vec{f}$.
Calcularemos la matriz jacobiana de $\vec{p}$ en (x, y). Para ello, notemos que:

$$D\vec{p}(x, y) = D\vec{g}(\vec{f}(x, y))D\vec{f}(x, y).$$

Notemos que:

$$(D\vec{f})(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 5 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (D\vec{g})(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 2y & 2z \\ 5yz & 5xz & 5xy \end{bmatrix}$$

Si reemplazamos (x, y) por $\vec{f}(x, y) = (xy, 5x, y^3)$, se tiene que

$$(D\vec{g})(\vec{f}(x, y)) = \begin{bmatrix} 6xy & 10x & 2y^3 \\ 25xy^3 & 5xy^4 & 25x^2y \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (D\vec{p})(x, y) = D\vec{g}(\vec{f}(x, y))D\vec{f}(x, y) &= \begin{bmatrix} 6xy & 10x & 2y^3 \\ 25xy^3 & 5xy^4 & 25x^2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ 5 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6xy^2 + 50x & 6x^2y + 6y^5 \\ 50xy^4 & 100x^2y^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El siguiente corolario puede ser útil en diversos casos:

COROLARIO 4.2. *Sea* $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable en* Ω. *Sea* $\vec{f}\colon \Omega_f \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *una función diferenciable.*

Definamos:

$$w = g(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{y} \quad x_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_m) \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces se tiene que:

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial w}{\partial u_1} & = & \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} + \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} + \dots + \dfrac{\partial g}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} \\
\dfrac{\partial w}{\partial u_2} & = & \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} + \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} + \dots + \dfrac{\partial g}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial u_2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\dfrac{\partial w}{\partial u_m} & = & \dfrac{\partial g}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} + \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial u_m} + \dots + \dfrac{\partial g}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial u_m}
\end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que la composición de $\vec{f}$ y g puede describirse por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ\vec{f}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "g"] \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

y que las matrices jacobianas son Dg y $D\vec{f}$.

Luego, se tiene que

$$Dg(f(u))Df(u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

y notemos que el producto matricial es equivalente al enunciado del teorema.

□

El reciente corolario considera los cambios de variable

$$x_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_m) \quad i = 1, \dots, m,$$

lo cual adapta muy bien al uso de sistemas de coordenadas distintos a las cartesianas.

EJEMPLO 4.33. *Consideremos la función* $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *definida*

$$V = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$$

y calculemos las derivadas parciales con respecto a las coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

Reemplazamos las derivadas parciales respectivas:

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial V}{\partial r} & = & 2x\cos(x^2 + y^2 + z^2)\cos(\theta)\sin(\varphi) + 2y\cos(x^2 + y^2 + z^2)\sin(\theta)\sin(\varphi) + \\
 & & 2z\cos(x^2 + y^2 + z^2)\cos(\varphi)
\end{array}$$

Como $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ *(el estudiante debe hacer los cálculos!!!), se obtiene que:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r} &= 2r\cos(r^2)\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + 2r\cos(r^2)\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) + 2r\cos(r^2)\cos^2(\varphi)\\ &= 2r\cos(r^2).\end{aligned}$$

Por otro lado, el estudiante podrá verificar que

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0.$$

EJEMPLO 4.34. *Sea* $g\colon \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable en* Ω *del tipo* $g(x, y, z)$ *donde*

$$\begin{aligned} x &= f_1(u_1, u_2, u_3)\\ y &= f_2(u_1, u_2, u_3)\\ z &= f_3(u_1, u_2, u_3)\end{aligned}$$

donde $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)\colon \Omega_f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una función diferenciable.*

Supongamos que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\vec{u}^*) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(\vec{u}^*) & \frac{\partial f_1}{\partial u_3}(\vec{u}^*)\\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\vec{u}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\vec{u}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial u_3}(\vec{u}^*)\\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1}(\vec{u}^*) & \frac{\partial f_3}{\partial u_2}(\vec{u}^*) & \frac{\partial f_3}{\partial u_3}(\vec{u}^*)\end{bmatrix}$$

es invertible en $\vec{u}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ *y que la derivadas parciales*

$$\frac{\partial g}{\partial u_1}(\vec{u}^*), \frac{\partial g}{\partial u_2}(\vec{u}^*) \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial u_3}(\vec{u}^*)$$

son conocidas. Es posible conocer los valores de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*, z^*), \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*, z^*) \quad \text{y} \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x^*, y^*, z^*)?$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u_1} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u_1} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u_1}\\ \frac{\partial g}{\partial u_2} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_2} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u_2} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u_2}\\ \frac{\partial g}{\partial u_3} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_3} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u_3} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u_3}\end{aligned}$$

Puede reescribirse como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1}(\vec{u}^*)\\ \frac{\partial g}{\partial u_2}(\vec{u}^*)\\ \frac{\partial g}{\partial u_3}(\vec{u}^*)\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\vec{u}^*) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(\vec{u}^*) & \frac{\partial f_1}{\partial u_3}(\vec{u}^*)\\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\vec{u}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\vec{u}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial u_3}(\vec{u}^*)\\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1}(\vec{u}^*) & \frac{\partial f_3}{\partial u_2}(\vec{u}^*) & \frac{\partial f_3}{\partial u_3}(\vec{u}^*)\end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial z}\end{pmatrix}.$$

Luego, como A *es invertible, el sistema de ecuaciones tiene solución.*

EJEMPLO 4.35. *Sea* $g = x^2 + 3y^2$*, donde* $x = e^t$ *e* $y = \cos(t)$*. Nos interesa calcular* $\partial g/\partial t$*.*

Definamos las funciones auxiliares $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *como* $\vec{f}(t) = (e^t, \cos(t))$ *y* $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *como* $g(x, y) = x^2 + 3y^2$*.*

El siguiente diagrama puede ser útil

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[dr, "g\circ\vec{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2xe^t - 6y\sin(t) = 2e^{2t} - 6\cos(t)\sin(t).$$

Ejemplo 4.36. *Sea $g(x,y) = x^2e^{y^3}$, donde $x = uv$ e $y = u^2 - v^3$. Encuentre las derivadas parciales: $\frac{\partial g}{\partial u}$ y $\frac{\partial g}{\partial v}$.*

Definamos la función auxiliar $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como:

$$\vec{f}(u,v) = (uv, u^2 - v^3),$$

del mismo modo, definamos $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$g(x,y) = x^2e^{y^3}.$$

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[dr, "g\circ\vec{f}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Notemos que:

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} 2xe^{y^3} & x^2e^{y^3} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D\vec{f}(u,v) = \begin{bmatrix} v & u \\ 2u & -3v^2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial g}{\partial u} = \tfrac{\partial g}{\partial x}\tfrac{\partial x}{\partial u} + \tfrac{\partial g}{\partial y}\tfrac{\partial y}{\partial u} &= 2xe^{y^3}v + 3x^2y^2e^{y^3}(2u) \\ \tfrac{\partial g}{\partial v} = \tfrac{\partial g}{\partial x}\tfrac{\partial x}{\partial v} + \tfrac{\partial g}{\partial y}\tfrac{\partial y}{\partial v} &= 2xe^{y^3}u + 3x^2y^2e^{y^3}(-3v^2). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.37. *Recordemos la ley de Boyle de gases:*

$$PV = KT$$

y supongamos que tanto la temperatura como la presión son funciones diferenciables con respecto a la variable t tiempo. Calcularemos $\partial V/\partial t$.

Notemos que:

$$V = \frac{KT}{P}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Ejemplo 4.38. *Consideremos la función $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. Además consideremos $x = re^s$ e $y = re^{-s}$. Calcularemos las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial s}$.*

Notamos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{xe^s + ye^{-s}}{x^2+y^2} = \tfrac{1}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{r(xe^s - ye^{-s})}{x^2+y^2} = \tanh(2s). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.39. *Sea $w = g(x, y, z)$ donde $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y además:*

$$x = r^2 + s^2 + u^2, \quad y = r - u + \cos(s) \quad z = e^r + \ln(su).$$

Calcular $\partial w/\partial r$,$\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial u$.
Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial g}{\partial x}2r + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}e^r \\
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial g}{\partial x}2s - \frac{\partial g}{\partial y}\sin(s) + \frac{\partial g}{\partial z}(1/s) \\
\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial x}2u - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}(1/u).
\end{aligned}$$

9. Propiedades algebraicas

Los siguientes resultados serán útiles para demostrar ciertas propiedades de la suma y producto de funciones diferenciables.

Lema 4.1. *La función $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$S(x, y) = x + y$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y verifica $DS(a, b)(h_1, h_2) = S(h_1, h_2)$ para todo $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. Notemos que:

$$\begin{aligned}
S(a + h_1, b + h_2) &= a + h_1 + b + h_2 \\
&= a + b + h_1 + h_2 \\
&= S(a, b) + S(h_1, h_2) + 0.
\end{aligned}$$

Luego, el resultado es una consecuencia de la definición de diferenciabilidad. □

Lema 4.2. *La función $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$S(x, y) = xy$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y verifica $DP(a, b)(h_1, h_2) = bh_1 + ah_2$ para todo $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. Notemos que:

$$\begin{aligned}
P(a + h_1, b + h_2) &= (a + h_1)(b + h_2) \\
&= ab + ah_2 + bh_1 + h_1h_2 \\
&= P(a, b) + bh_1 + ah_2 + h_1h_2.
\end{aligned}$$

Notemos que la función $(h_1, h_2) \to bh_1 + ah_2$ es lineal y que:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0,$$

por lo tanto el resultado es una consecuencia de la definición de diferenciabilidad. □

Lema 4.3. *La función* $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$D(x,y)=x/y$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ *y verifica*

$$Dd(a,b)(h_1,h_2)=\frac{bh_1-ah_2}{b^2}\quad \text{para todo}\quad (h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Demostración. Notemos que:

$$\begin{array}{rcl}
d(a+h_1,b+h_2) & = & \frac{a+h_1}{b+h_2}-\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\\
& = & \frac{a}{b}+\frac{a+h_1}{b+h_2}-\frac{a}{b}\\
& = & d(a,b)+\frac{ab+h_1b-ab-ah_2}{b(b+h_2)}\\
& = & d(a,b)+\frac{bh_1-ah_2}{b^2+bh_2}\\
& = & d(a,b)+\frac{bh_1-ah_2}{b^2}+\frac{bh_1-ah_2}{b^2+bh_2}-\frac{bh_1-ah_2}{b^2}\\
& = & d(a,b)+\frac{bh_1-ah_2}{b^2}+\frac{bh_1-ah_2}{b}\Big(\frac{1}{b+h_2}-\frac{1}{b}\Big)\\
& = & d(a,b)+\frac{bh_1-ah_2}{b^2}+\frac{bh_1-ah_2}{b}\Big(\frac{-h_2}{b(b+h_2)}\Big)\\
& = & d(a,b)+\frac{bh_1-ah_2}{b^2}+\Big(\frac{ah_2^2-bh_1h_2}{b^2(b+h_2)}\Big)
\end{array}$$

Como la función

$$(h_1,h_2)\to\frac{bh_1-ah_2}{b^2}$$

es lineal y además (por ejemplo, usamos coordenadas polares):

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{ah_2^2-bh_1h_2}{b^2(b+h_2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0,$$

podemos ver que el resultado es una consecuencia de la definición de diferenciabilidad. □

Lema 4.4. *Si las funciones* $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *y* $g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *son diferenciables en* $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$. *Entonces la función* $\vec{u}\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$\vec{u}(\vec{x})=(f(\vec{x}),g(\vec{x}))$$

es diferenciable en $\vec{x}_0$ *y satisface* $D(f(\vec{x}_0),g(\vec{x}_0))=(Df(\vec{x}_0),Dg(\vec{x}_0))$.

Demostración. Notemos que:

$$\begin{array}{rcl}
\vec{u}(\vec{x}_0+\vec{h}) & = & (f(\vec{x}_0+\vec{h}),g(\vec{x}_0+\vec{h}))\\
& = & (f(\vec{x}_0),g(\vec{x}_0))+(Df(\vec{x}_0)(\vec{h}),Dg(\vec{x}_0)(\vec{h}))+(\vec{r}_f(\vec{h}),r_g(\vec{h})).
\end{array}$$

El lector debe verificar que la función $\vec{h}\to(Df(\vec{x}_0)(\vec{h}),Dg(\vec{x}_0)(\vec{h}))$ y por otro lado la diferenciabilidad de f y g en $\vec{x}_0$ implica que:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\Big(\frac{\vec{r}_f(\vec{h})}{||\vec{h}||},\frac{r_g(\vec{h})}{||\vec{h}||}\Big)=(0,0),$$

lo cual termina la demostración. □

Teorema 4.9. *Sean* $f,g\colon\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, *donde* Ω *es un conjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$. *Si* f *y* g *son diferenciables en* $\vec{x}_0\in\Omega$, *entonces:*

i) *La función* $f+g\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *definida por* $(f+g)(\vec{x})=f(\vec{x})+g(\vec{x})$ *es diferenciable en* $\vec{x}_0$ *y además* $D(f+g)(\vec{x}_0)=Df(x_0)+Dg(\vec{x}_0)$.

ii) *La función* $fg\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *definida por* $(fg)(\vec{x})=f(\vec{x})g(\vec{x})$ *es diferenciable en* $\vec{x}_0$. *Además* $D(fg)(\vec{x}_0)=g(\vec{x}_0)Df(\vec{x}_0)+f(x_0)Dg(\vec{x}_0)$.

iii) *Si* $g(\vec{x}_0)\neq 0$, *la función* $f/g\colon U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *definida por* $(f/g)(\vec{x})=f(\vec{x})/g(\vec{x})$ *es diferenciable en* $\vec{x}_0$. *Además:*

$$D(f/g)(\vec{x}_0)=\frac{Df(\vec{x}_0)g(\vec{x}_0)-f(\vec{x}_0)Dg(\vec{x}_0)}{g(\vec{x}_0)^2}$$

Demostración. Para probar (i) notemos que $f(\vec{x})+g(\vec{x})=S(f(\vec{x}),g(\vec{x}))$, usando la regla de la cadena y los Lemas 4.1 y 4.4 se tiene que:

$$\begin{aligned}D(f(\vec{x}_0)+g(\vec{x}_0)) &= DS(f(\vec{x}_0),g(\vec{x}_0))D(f(\vec{x}_0),g(\vec{x}_0))\\ &= S(Df(\vec{x}_0),Dg(\vec{x}_0))\\ &= Df(\vec{x}_0)+Dg(\vec{x}_0).\end{aligned}$$

Para demostrar (ii), notemos que $f(\vec{x})g(\vec{x})=P(f(\vec{x}),g(\vec{x}))$, usando la regla de la cadena y los Lemas 4.2 y 4.4 se tiene que:

$$\begin{aligned}D(f(\vec{x}_0)g(\vec{x}_0)) &= DP(f(\vec{x}_0),g(\vec{x}_0))D(f(\vec{x}_0),g(\vec{x}_0))\\ &= g(\vec{x}_0)Df(\vec{x}_0)+f(\vec{x}_0)Dg(\vec{x}_0)).\end{aligned}$$

FInalmente, la demostración de (iii) se basa en $f(\vec{x})/g(\vec{x})=d(f(\vec{x}),g(\vec{x}))$, usando la regla de la cadena y los Lemas 4.3 y 4.4 se tiene que:

$$\begin{aligned}D(f(\vec{x}_0)/g(\vec{x}_0)) &= Dd(f(\vec{x}_0),g(\vec{x}_0))D(f(\vec{x}_0),g(\vec{x}_0))\\ &= \frac{Df(\vec{x}_0)g(\vec{x}_0)-f(\vec{x}_0)Dg(\vec{x}_0))}{g(x_0)^2}.\end{aligned}$$

□

Es importante destacar que el Teorema se puede demostrar directamente mediante el uso de la definición de función diferenciable, sin recurrir al uso de la regla de la cadena. El lector está invitado a comparar la simplicidad o complejidad de ambas demostraciones.

10. Teorema del valor medio

El **Teorema del valor medio** juega un papel importante en el estudio de las funciones $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe $\theta\in(a,b)$ tal que:

$$f(b)-f(a)=f'(\theta)(b-a).$$

Para el caso de varias variables, no es posible obtener una generalización directa. Sin embargo, existen resultados útiles e interesantes.

Dados dos vectores $\vec{x}\in\mathbb{R}^m$ e $\vec{y}\in\mathbb{R}^m$, introduciremos la siguiente notación para definir la recta que une ambos vectores:

$$[\vec{x},\vec{y}]=\{(1-t)\vec{x}+t\vec{y}\in\mathbb{R}^m\colon t\in[0,1]\}.$$

Teorema 4.10. *Sea* $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ *abierto y convexo y* $\vec{f}\colon\Omega\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ *una función diferenciable en* Ω. *Si* $\vec{x}\in\Omega$ *e* $\vec{y}\in\Omega$, *entonces, para cada* $\vec{u}=(u_1,\ldots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ *existe* $\vec{z}\in[\vec{x},\vec{y}]$ *tal que:*

$$\vec{u}\cdot\{\vec{f}(\vec{y})-\vec{f}(\vec{x})\}=\vec{u}\cdot D\vec{f}(\vec{z})\{\vec{y}-\vec{x}\},$$

donde $Df(\cdot)$ *es la diferencial de* $\vec{f}$ *y* $\cdot$ *es el producto interno en* $\mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, definamos $\vec{a} = \vec{y} - \vec{x}$ y notemos que la convexidad de Ω implica que

$$\vec{x} + t\vec{a} = t\vec{y} + (1-t)\vec{x} = [\vec{x}, \vec{y}] \in \Omega \quad \text{para todo} \quad t \in [0,1]. \tag{4.37}$$

Como $\vec{x} \in \Omega$ y Ω es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B(\vec{x}, r) \subset \Omega.$$

Si elegimos $0 < \varepsilon_1 < \frac{r}{||\vec{a}||}$ tal que $t \in (-\varepsilon_1, 0)$ se tiene que $\vec{x} + t\vec{a} \in B(\vec{x}, r) \subset \Omega$. Por lo tanto:

$$\vec{x} + t\vec{a} = t\vec{y} + (1-t)\vec{x} \in \Omega \quad \text{para todo} \quad t \in (-\varepsilon_1, 0). \tag{4.38}$$

Como $\vec{x} + \vec{a} \in \Omega$ y Ω es abierto, existe $r' > 0$ tal que

$$B(\vec{x} + \vec{a}, r') \subset \Omega.$$

Si elegimos $0 < \varepsilon_2 < \frac{r'}{||\vec{a}||}$ tal que $t \in (0, \varepsilon_2)$ se tiene que $\vec{x} + \vec{a} + t\vec{a} \in B(\vec{x} + \vec{a}, r') \subset \Omega$. Por lo tanto:

$$\vec{x} + t\vec{a} \in \Omega \quad \text{para todo} \quad t \in (1, 1 + \varepsilon_2). \tag{4.39}$$

Si elegimos $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que (4.37),(4.38) y (4.39) implican:

$$\vec{x} + t\vec{a} = t\vec{y} + (1-t)\vec{x} \in \Omega \quad \text{para todo} \quad t \in (-\varepsilon, 1 + \varepsilon). \tag{4.40}$$

Ahora definimos $F\colon (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ de la forma siguiente:

$$F(t) = \vec{u} \cdot \vec{f}(\vec{x} + t\vec{a}) = u_1 f_1(\vec{x} + t\vec{a}) + \ldots + u_n f_n(\vec{x} + t\vec{a}),$$

donde $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \neq \vec{0}$ es un vector no nulo de $\vec{R}^n$. Por lo tanto, usando la regla de la cadena, se tiene que:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \vec{u} \cdot D\vec{f}(\vec{x} + t\vec{a}) \tfrac{\partial}{\partial t}(\vec{x} + t\vec{a}) \\ &= \vec{u} \cdot D\vec{f}(\vec{x} + t\vec{a})(\vec{y} - \vec{x}). \end{aligned} \tag{4.41}$$

Ahora como F es derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, podemos aplicar el Teorema del valor medio clásico y concluir que existe $\theta \in (0,1)$ tal que:

$$F(1) - F(0) = F'(\theta),$$

lo cual se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{f}(\vec{x} + \vec{a}) - \vec{u} \cdot \vec{f}(\vec{x}) &= \vec{u} \cdot \vec{f}(\vec{y}) - \vec{u} \cdot \vec{f}(\vec{x}) \\ &= \vec{u} \cdot \{\vec{f}(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{x})\} \\ &= \vec{u} \cdot Df(\vec{x} + \theta\vec{a})(\vec{y} - \vec{x}) \end{aligned}$$

Finalmente, el teorema se concluye al definir $\vec{z} = \vec{x} + \theta\vec{a} \in [\vec{x}, \vec{y}]$. □

COROLARIO 4.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ abierto y convexo y $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en Ω. Si $\vec{x} \in \Omega$ e $\vec{y} \in \Omega$, entonces existe $\vec{z} \in [\vec{x}, \vec{y}]$ tal que:*

$$\begin{aligned} f(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{x}) &= Df(\vec{z})\{\vec{y} - \vec{x}\} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{z})(y_i - x_i) \\ &= \nabla f(\vec{z}) \cdot (\vec{y} - \vec{z}). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Se utiliza $u = 1$ en el resultado anterior. □

COROLARIO 4.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ abierto y convexo y $\vec{f}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en Ω y tiene derivadas parciales acotadas en Ω. Si $\vec{x} \in \Omega$ e $\vec{y} \in \Omega$, entonces se cumple la desigualdad:*

$$||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})||_2 \leq \sup_{\vec{z}\in[\vec{x},\vec{y}]} ||D\vec{f}(\vec{z})||||\vec{y} - \vec{x}||_2,$$

donde $||D\vec{f}(\vec{z})||$ está definido por:

$$||D\vec{f}(\vec{z})|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{z})\right|^2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x})$, la demostración es inmediata. Por lo tanto, supondremos que $\vec{f}(\vec{x}) \neq \vec{f}(\vec{x})$, lo cual nos permitirá definir el vector unitario:

$$\vec{u} = \frac{\vec{f}(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{x})}{||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x})||_2}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\{\vec{f}(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{x})\} &= \tfrac{\vec{f}(\vec{y})-\vec{f}(\vec{x})\}\cdot\{\vec{f}(\vec{y})-\vec{f}(\vec{x})\}}{||\vec{f}(\vec{y})-\vec{f}(\vec{x})||_2} \\ &= ||\vec{f}(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{x})||_2 \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema del valor medio se tiene que:

$$||\vec{f}(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{x})||_2 = \vec{u}\cdot D\vec{f}(\vec{z})(\vec{y} - \vec{x}).$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz y recordando que $||\vec{u}||_2 = 1$ podemos ver que:

$$||\vec{f}(\vec{y}) - \vec{f}(\vec{y})||_2 \leq ||D\vec{f}(\vec{z})(\vec{y} - \vec{x})||. \tag{4.42}$$

Notemos que:

$$D\vec{f}(\vec{z})(\vec{y} - \vec{x}) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(z)(y_i - x_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(z)(y_i - x_i) \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(z)(y_i - x_i) \end{pmatrix}$$

Calculando la norma euclidiana y usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz, notemos que:

$$\begin{aligned}
||D\vec{f}(\vec{z})(\vec{y}-\vec{x})||_2 &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{z})(y_i-x_i)\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\Big(\nabla f_j(\vec{z})\cdot(\vec{y}-\vec{x})\Big)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}||\nabla f_j(\vec{z})||_2^2||\vec{y}-\vec{x})||_2^2} \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\Big(||\nabla f_j(\vec{z})||_2^2\Big)^2}\,||\vec{y}-\vec{x}||_2 \\
&= ||D\vec{f}(z)||||\vec{y}-\vec{x}||_2.
\end{aligned}$$

Como las derivadas parciales existen y son acotadas en Ω, se tiene que (4.42) implica:

$$\begin{aligned}
||\vec{f}(\vec{y})-\vec{f}(\vec{y})||_2 &\leq ||D\vec{f}(\vec{z})(\vec{y}-\vec{x})||_2 \\
&\leq ||D\vec{f}(z)||||\vec{y}-\vec{x}||_2 \\
&\leq \sup_{\vec{z}\in[\vec{x},\vec{y}]}||D\vec{f}(z)||||\vec{y}-\vec{x}||_2,
\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

Como $\mathbb{R}^m$ es abierto y convexo, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 4.5. *Sea $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^m$ y tiene derivadas parciales acotadas en $\mathbb{R}^m$, entonces es lipschitziana y se cumple la desigualdad:*

$$||\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{y})||_2 \leq \sup_{\vec{z}\in[\vec{x},\vec{y}]}||D\vec{f}(\vec{z})|||\vec{y}-\vec{x}|||_2,$$

donde $||D\vec{f}(\vec{z})||$ está definido por:

$$||D\vec{f}(\vec{z})|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{z})\right|^2}.$$

Otra consecuencia es el siguiente resultado

Corolario 4.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ abierto y convexo y $\vec{f}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en Ω. Si $D\vec{f}(\vec{x}) = 0$ para todo $\vec{x} \in \Omega$, entonces $\vec{f}$ es constante en Ω.*

Demostración. Sean $\vec{x} \in \Omega$ e $\vec{y} \in \Omega$. Por Teorema del valor medio se tiene que para todo $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ se verifica:

$$\vec{u}\cdot\{\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{y})\} \quad = \quad 0.$$

Si consideramos $\vec{u} = \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})$, se tiene que $||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})||_2^2$, lo cual implica $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{y})$ para todo $\vec{x} \in \Omega$ e $\vec{y} \in \Omega$. $\square$

11. Apendice: Demostración del Teorema 4.5

El Teorema 4.5, fue enunciado sin demostración. dicho resultado decía que Si $\vec{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde Ω es un conjunto abierto. Si las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j$ existen en $B(\vec{x}_0, \delta)$ y son continuas en $\vec{x}_0 \in \Omega$, entonces $\vec{f}$ es diferenciable en x_0.

Como las derivadas parciales existen y son continuas, sabemos que $\vec{f}$ admite la representación:

$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h}) + \vec{r}(\vec{h}).$$

Por lo tanto, sólo tenemos que demostrar que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - D\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \vec{0}.$$

Demostrar la anterior propiedad es equivalente a demostrar

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f_j(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f_j(\vec{x}_0) - \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j(\vec{x}_0)}{\partial x_i} h_i}{||\vec{h}||} = \vec{0} \quad \forall \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.43}$$

Escojamos $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ tal que $||\vec{h}|| < \delta$, lo cual implica que $\vec{x}_0 + \vec{h} \in B(\vec{x}_0, \delta)$. Además, la convexidad de $B(\vec{x}_0, \delta)$ y el Teorema del Valor medio implican la existencia de $\vec{z} \in [\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}]$ tal que:

$$\begin{aligned} f_j(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f_j(\vec{x}_0) &= \nabla f_j(\vec{z})\vec{h} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{z}) h_i \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f_j(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f_j(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) h_i = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{z}) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \right\} h_i$$

La continuidad de las derivadas parciales en x_0 implica que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\delta} > 0 \quad \text{tal que} \quad \vec{w} \in B(\vec{x}_0, \tilde{\delta}) \Rightarrow \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{w}) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \right| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Elegimos $\delta < \tilde{\delta}$. Por otro lado, como $\vec{z} \in [\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}]$, sabemos que $\vec{z} \in B(\vec{x}_0, \delta) \subset B(\vec{x}_0, \tilde{\delta})$, lo cual implica:

$$\begin{aligned} \left| f_j(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f_j(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) h_i \right| &\leq \sum_{i=1}^{m} \left| \left\{ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{z}) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) \right\} h_i \right| \\ &\leq \varepsilon ||\vec{h}||. \end{aligned}$$

En síntesis, se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\delta} > 0 \quad \text{tal que} \quad \vec{n} \in B(0, \delta) \Rightarrow \frac{\left| f_j(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f_j(\vec{x}_0) - \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{x}_0) h_i \right|}{||\vec{h}||} \leq \varepsilon,$$

lo cual es equivalente a (4.43), lo cual concluye la demostración.

Capítulo 5

Derivadas de orden Superior

1. Definiciones Preliminares

Definición 5.1. *Sea* $\vec{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *(Ω es abierto en $\mathbb{R}^m$). Si para cada $\vec{x}_0 \in \Omega$ existen las derivadas parciales*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \text{y} \quad j = 1, \dots, m,$$

entonces se definen (cuando existen):

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0 + h\vec{e}_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)}{h} \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(\vec{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\vec{x}_0)}{h}. \tag{5.2}$$

Ejemplo 5.1. *Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Notemos que si $(x, y) \neq (0, 0)$ las derivadas parciales se pueden calcular simbólicamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\{y(x^2 - y^2) + 2x^2 y\}(x^2 + y^2) - 2x\{xy(x^2 - y^2)\}}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\{x(x^2 - y^2) - 2y^2 x\}(x^2 + y^2) - 2y\{xy(x^2 - y^2)\}}{(x^2 + y^2)^2}$$

Por otro lado, podemos comprobar que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Ahora podremos calcular:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big\{ -\frac{h^5}{h^4}\Big\} = -1$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big\{\frac{h^5}{h^4}\Big\} = 1.$$

Por lo tanto, podemos observar que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

EJEMPLO 5.2. *Consideremos la función* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \sin(x^2+y^2).$$

Notemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(x^2+y^2) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\cos(x^2+y^2)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -4xy\sin(x^2+y^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Ambos ejemplos motivan la siguiente pregunta: bajo que condiciones es posible asegurar que se verifique la siguiente identidad:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)?.$$

El siguiente resultado, responde parcialmente la pregunta anterior (su demostración reproduce las ideas de la demostración realizada en [**1**]):

TEOREMA 5.1 (Teorema de Schwarz). *Sea* $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *(*Ω *es abierto en* $\mathbb{R}^m$*) tal que las funciones:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{u}) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{u})$$

son continuas en Ω*. Entonces:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}_0) \quad \text{para todo} \quad \vec{x}_0 \in \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. por simplicidad supondremos $m=2$ y $(x_0,y_0)\in\Omega$.

Como las funciones:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

son continuas en Ω, el Teorema 4.5 implica que la función $\frac{\partial f}{\partial x}$ es diferenciable en Ω y el Teorema 4.4 implica que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en Ω.

De igual forma, como las funciones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

son continuas en Ω, se puede demostrar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en Ω.

Ahora, como las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en Ω, los Teoremas 4.5 y 4.4 implican que f es diferenciable y continua en Ω.

Elegiremos números positivos h y k tales que el rectángulo de vértices

$$(x_0,y_0),(x_0+h,y_0), \quad (x_0,y_0+k) \quad \text{y} \quad (x_0+h,y_0+k)$$

está contenido en Ω.

Ahora definiremos las funciones auxiliares:

$$u(x) = f(x,y_0+k) - f(x,y_0) \quad \text{y} \quad v(y) = f(x_0+h,y) - f(x_0,y)$$

También definiremos la función $\Delta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\Delta(h,k) = f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0+k) + f(x_0,y_0)$$

Paso 1: Estudio de $\Delta(h,k)$ y $u(x)$:

Es fácil notar que:

$$\begin{aligned}\Delta(h,k) &= f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-\{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)\}\\ &= u(x_0+h)-u(x_0).\end{aligned}$$

Notemos que $u(x)$ es diferenciable en (x_0, x_0+h). En efecto, usando la definición tenemos que:

$$\begin{aligned}u'(x) &= \lim_{\xi\to 0}\frac{u(x+\xi)-u(x)}{\xi}\\ &= \lim_{\xi\to 0}\frac{f(x+\xi,y_0+k)-f(x+\xi,y_0)-f(x,y_0+k)+f(x,y_0)}{\xi}\\ &= \lim_{\xi\to 0}\frac{f(x+\xi,y_0+k)-f(x,y_0+k)-f(x+\xi,y_0)+f(x,y_0)}{\xi}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)\end{aligned}$$

Como $u(\cdot)$ es diferenciable en (x_0, x_0+h), sabemos que es continua en (x_0, x_0+h). Por otro lado, la continuidad de f en Ω implica que:

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = u(x_0) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0+h} u(x) = u(x_0+h),$$

por lo tanto $u(\cdot)$ es continua en $[x_0, x_0+h]$. Ahora, aplicamos el Teorema del valor medio a la función $u(\cdot)$, obteniendo:

$$\Delta(h,k) = u(x_0+h)-u(x_0) = u'(z)h, \quad z\in(x_0,x_0+h).$$

Si reescrimos $z = x_0+\theta_1 h$ con $\theta_1\in(0,1)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta(h,k) &= u'(x_0+\theta_1 h)h\\ &= \Big\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0)\Big\}h\end{aligned}$$

Ahora, definiremos la función $g_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la forma siguente:

$$g_2(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h, y).$$

Notemos que g_2 es diferenciable en (y_0, y_0+k). En efecto:

$$\begin{aligned}g_2'(y) &= \lim_{\xi\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y+\xi)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y)}{h}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_1 h,y).\end{aligned}$$

Ya hemos visto que $\partial f/\partial x$ es continua en Ω. Por lo tanto, g_2 es continua en $[y_0, y_0+k]$. Entonces, si aplicamos el Teorema del valor medio a la función g_2 se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta(h,k) &= \Big\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1 h,y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta_1 h,y_0)\Big\}h\\ &= \{g_2(y_0+k)-g_2(y_0)\}h\\ &= hk\tfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_1 h,z)\end{aligned}$$

para algún $z\in(y_0,y_0+h)$. Si elegimos $z = y_0+\theta_2 k$ con $\theta_2\in(0,1)$, se tiene que:

$$\frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k). \tag{5.3}$$

Como la función $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ es continua en $(x_0, y_0) \in \Omega$, se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ tq } ||(x,y)-(x_0,y_0)||_\infty < \eta \Rightarrow \Big| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \Big| < \varepsilon.$$

Si escogemos $(x,y) = (x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k)$ con $||(h,k)||_\infty < \eta$, la propiedad $\theta_i \in (0,1)$ $(i = 1,2)$ combinada con (5.3) implica que:

$$\begin{array}{lll} \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \quad \text{tq} \quad ||(\theta_1 h, \theta_2 k)||_\infty < \eta & \Rightarrow & \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \right| < \varepsilon \\ & \Rightarrow & \left| \frac{\Delta(h,k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \right| < \varepsilon. \end{array}$$

Es fácil ver que la última desigualdad es equivalente a:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0). \tag{5.4}$$

Paso 2: Estudio de $\Delta(h,k)$ y $v(y)$:

Es fácil notar que:

$$\begin{array}{rcl} \Delta(h,k) & = & f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - \{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)\} \\ & = & v(y_0+k) - v(y_0). \end{array}$$

Como en el caso anterior, podemos demostrar que $v(\cdot)$ es derivable en (y_0, y_0+k) y continua en $[y_0, y_0+k]$. Por otro lado, usando la definición de derivada tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} v'(y) & = & \lim\limits_{\xi\to 0} \dfrac{f(x_0+h, y+\xi) - f(x_0+h,y) - \{f(x_0, y-\xi) + f(x_0,y)\}}{\xi} \\ & = & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) \end{array}$$

Ahora, si aplicamos el Teorema del valor medio a la función $v(\cdot)$, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} \Delta(h,k) & = & v'(y_0+\xi_1 k)k \\ & = & \Big\{ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\xi_1 k) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\xi_1 k) \Big\} k \end{array}$$

con $\xi_1 \in (0,1)$.

Ahora, definiremos la función $g_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma siguente:

$$g_1(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0+\xi_1 k).$$

Como antes, podemos demostrar que g_2 es diferenciable en (x_0, x_0+h) y continua en $[x_0, x_0+h]$. En efecto:

$$g_1'(x) \quad = \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\xi_2 h, y_0+\xi_1 k).$$

Aplicando el Teorema del valor medio a la función g_1 se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} \Delta(h,k) & = & \{g_1(x_0+h) - g_2(x_0)\}k \\ & = & hk \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\xi_2 h, y_0+\xi_1 k) \end{array}$$

donde $\xi_2 \in (0,1)$. De esta forma se obtiene:

$$\frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\xi_2 h, y_0+\xi_1 k). \tag{5.5}$$

Finalmente, usando la continuidad de las segundas derivadas parciales como en el caso anterior implicará que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \tag{5.6}$$

y el Teorema es una consecuencia de la unicidad del límite. □

2. Operadores diferenciales

La definición de las segundas derivadas parciales permite definir los siguientes operadores diferenciales:

Definición 5.2. *Sea $\vec{F}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde Ω es un conjunto abierto. Una función cuyas derivadas parciales existen en Ω. La* ***divergencia*** *de $\vec{F}$ en $\vec{u} \in \Omega$ es definida por:*

$$\mathrm{Div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i(\vec{u})}{\partial x_i}. \tag{5.7}$$

Es fácil recordar a la divergencia de $\vec{F}$ como a la traza de la matriz jacobiana de $\vec{F}$.

Definición 5.3. *Sea $\vec{F}\colon \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donde Ω es un conjunto abierto. Una función cuyas derivadas parciales existen en Ω. El* ***rotor*** *de $\vec{F}$ en $\vec{u} \in \Omega$ es definido por:*

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{u}) = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y}(\vec{u}) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(\vec{u}), \frac{\partial F_1}{\partial z}(\vec{u}) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(\vec{u}), \frac{\partial F_2}{\partial x}(\vec{u}) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(\vec{u})\Big). \tag{5.8}$$

Definición 5.4. *Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde Ω es un conjunto abierto. Una función cuyas segundas derivadas parciales existen en Ω. El* ***Laplaciano*** *de $\vec{F}$ en $\vec{u} \in \Omega$ es definida por:*

$$\triangle f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{u}). \tag{5.9}$$

Observación 12. *Tambien es usual utilizar las notaciones:*

$$\triangle f(\vec{u}) = \nabla^2 f(\vec{u}) = \nabla \cdot \nabla f$$

Hay una interesante (e importante!) relación entre los operadores gradiente, divergencia y laplaciano. La cual describimos a continuación

Lema 5.1. *Sea $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde Ω es un conjunto abierto. Una función cuyas segundas derivadas parciales existen en Ω. Entonces*

$$\mathrm{Div}\ \mathrm{Grad} f(\vec{u}) = \nabla \cdot (\nabla f)(\vec{u}) = \triangle f(\vec{u}). \tag{5.10}$$

Demostración. Recordemos que

$$\nabla f(\vec{u}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{u}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{u})\Big)$$

Ahora, si calculamos la matriz jacobiana de $\nabla f(\vec{u})$, es fácil notar que es una matriz diagonal con segundas derivadas parciales, luego, se tiene que:

$$\nabla \cdot (\nabla f)(\vec{u}) \quad = \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{u})$$

□

3. Segunda derivada de f (versión informal)

En el curso de cálculo en una variable, se demostró la identidad

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2},$$

la idea es relacionar esa igualdad con las segundas derivadas de una función $\vec{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Si $\vec{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable en el abierto Ω, sabemos que

$$\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + D\vec{f}(x)\vec{h} + \vec{r}(\vec{h}) \quad \text{donde} \quad \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{r}(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \vec{0}.$$

Ahora, nos concentraremos en estudiar la diferenciabilidad de la función

$$\vec{x} \mapsto D\vec{f}(x)\vec{h}.$$

Notemos que si aplicamos la definición clásica de diferenciabilidad a esta función deberíamos obtener la expresión

$$D\vec{f}(\vec{x}+\vec{u})\vec{h} = D\vec{f}(\vec{x})\vec{h} + D(D\vec{f}(\vec{x})\vec{h})\vec{u} + \tilde{r}(\vec{u}) \quad \text{donde} \quad \lim_{\vec{u}\to\vec{0}} \frac{\vec{\tilde{r}}(\vec{u})}{||\vec{u}||} = \vec{0}.$$

La expresión $D(D\vec{f}(\vec{x})\vec{h})\vec{u}$ concentrará nuestra atención:

Definición 5.5. *Sea $\vec{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función en el abierto Ω, cuyas segundas derivadas parciales son continuas. Se dice que la segunda diferencial de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0 \in \Omega$ es la función $D^2\vec{f}(\vec{x}_0)\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definida por:*

$$D^2\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h},\vec{u}) = D(D\vec{f}(\vec{x}_0)\vec{h})\vec{u}. \tag{5.11}$$

y satisface

$$D\vec{f}(\vec{x}+\vec{u})\vec{h} = D\vec{f}(\vec{x})\vec{h} + D^2\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h},\vec{u}) + \tilde{r}(\vec{u}) \quad \text{donde} \quad \lim_{\vec{u}\to\vec{0}} \frac{\vec{\tilde{r}}(\vec{u})}{||\vec{u}||} = \vec{0}.$$

El siguiente Teorema se enuncia sin demostración, el lector puede consultar [**3**, pag. 21]:

Teorema 5.2. *Sea $\vec{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función en el abierto Ω, cuyas segundas derivadas parciales son continuas. La segunda diferencial $D^2\vec{f}(\vec{x}_0)\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una función bilineal, simétrica y continua.*

Observación 13. *La bilinealidad de $D^2\vec{f}(\vec{x}_0)$ significa que:*

- $D^2\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h}_1+\vec{h}_2,\vec{u}) = D^2\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h}_1,\vec{u}) + D^2\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h}_2,\vec{u})$.
- $D^2\vec{f}(\vec{x}_0)(\lambda\vec{h},\vec{u})$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $D^2\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h},\vec{u}_1+\vec{u}_2) = D^2\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h},\vec{u}_1) + D^2\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h},\vec{u}_2)$.
- $D^2\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h},\lambda\vec{u})$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es decir, es lineal con respecto a cada variable.

Observación 14. *La simetría de de $D^2\vec{f}(\vec{x}_0)$ significa que:*

$$D^2\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{h},\vec{u}) = D^2\vec{f}(\vec{x}_0)(\vec{u},\vec{h}).$$

A continuación intentaremos conocer la estructura de la forma bilineal (5.11) para el caso particular (pero muy importante) de funciones $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

TEOREMA 5.3. *Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función cuyas segundas derivadas parciales son continuas. La segunda diferencial es de la forma:*

$$D^2\vec{f}(x,y)(\vec{h},\vec{v}) \quad = \quad \vec{v}^T H_f(x,y)\vec{h} \tag{5.12}$$

*donde $\vec{v} = (v_1), v_2$, $\vec{h} = (h_1, h_2)$ y $H_f(x,y)$ es la **Matriz Hessiana** de f en (x,y) definida por:*

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

DEMOSTRACIÓN. Usando la Definición 5.5, sabemos que

$$Df(x+h_1, y+h_2)\vec{v} - Df(x,y)\vec{v} = D^2 f(x,y)(\vec{h},\vec{v}) + r(\vec{h}), \tag{5.14}$$

donde

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{r(\vec{h})}{||\vec{h}||} = 0.$$

Por otro lado, notemos que

$$Df(x+h_1,y+h_2)\vec{v} \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x+h_1,y+h_2) & \frac{\partial f}{\partial y}(x+h_1,y+h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

y

$$Df(x,y)\vec{v} \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Luego, se tiene que

$$\{Df(x+h_1,y+h_2) - Df(x,y)\}\vec{v} = \begin{bmatrix} f_x(x+h_1,y+h_2) - f_x(x,y) & f_y(x+h_1,y+h_2) - f_y(x,y) \end{bmatrix} \vec{v}$$

donde f_x y f_y denotan las derivadas parciales:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Como f_x y f_y son funciones diferenciales, aplicamos la definición de diferenciabilidad a estas funciones, obteniendo

$$\begin{aligned} f_x(x+h_1,y+h_1) - f_x(x,y) &= \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{yx}(x,y) \end{bmatrix} \vec{h} + r_1(\vec{h}) \\ & f_{xx}(x,y)h_1 + f_{yx}(x,y)h_2 + r_1(\vec{h}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_y(x+h_1,y+h_1) - f_y(x,y) &= \begin{bmatrix} f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} \vec{h} \\ &= f_{xy}(x,y)h_1 + f_{yy}(x,y)h_2 + r_2(\vec{h}). \end{aligned}$$

Donde

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{r_1(\vec{h})}{||\vec{h}||} = \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{r_2(\vec{h})}{||\vec{h}||} = 0. \tag{5.15}$$

Luego, es fácil ver que

$$\begin{aligned} Df(x+h_1,y+h_2)\vec{v} - Df(x,y)\vec{v} &= v_1 f_{xx} h_1 + v_1 f_{yx} h_2 + v_2 f_{xy} h_1 + v_2 f_{yy} h_2 + r_1(\vec{u})v_1 + r_2(\vec{u})v_2 \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}_{=D^2 f(x,y)(\vec{h},\vec{v})} + \underbrace{r_1(\vec{h})v_1 + r_2(\vec{h})v_2}_{r(\vec{h})}. \end{aligned}$$

y los limites (5.15) implican que esta identidad satisface la ecuación (5.14).

$\square$

OBSERVACIÓN 15. *Es fácil demostrar que*

$$D^2\vec{f}(x,y)(\vec{h},\vec{v}) \;\; = \;\; \vec{v}^T H_f(x,y)\vec{h}$$

donde $\vec{v} = (v_1), v_2$, $\vec{h} = (h_1, h_2)$ *y* $H_f(x,y)$ *es la matriz Hessiana de* f *en* (x,y) *es una forma bilineal.*

Capítulo 6

Integral de línea

En este capítulo estudiaremos a las funciones $\vec{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, por lo tanto adoptaremos la convención

$$\vec{f}(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)\big)^t,$$

donde $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de variable real (estudiada en los cursos anteriores de cálculo), la cual es denotada como i–ésima componente.

1. Límites y continuidad

Definición 6.1. *Sea $\vec{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con funciones componentes $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Se dice que*

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{L} \quad \text{con} \quad \vec{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$$

si y sólo si:

$$\lim_{t\to t_0} f_i(t) = \ell_i \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Esta definición es útil en tanto el límite puede calcularse usando los métodos y técnicas clásicas de cálculo de límites vistos en el curso inicial de cálculo.

Ejemplo 6.1. *Consideremos $\vec{f}(t) = \big(\arctan(t), \sin(t)\big)$. Es claro que*

$$\lim_{t\to 0} \vec{f}(t) = (0,0).$$

Por otro lado, podemos ver que $\vec{f}$ no tiene límite cuando $t \to +\infty$ debido a que $\lim\limits_{t\to+\infty} \sin(t)$ no existe.

Ejemplo 6.2. *Consideremos $\vec{f}(t) = \big(\sin(1/t), \cos(t)\big)$. Es claro que $\vec{f}(t)$ no tiene límite en 0 debido a que el siguiente límite no existe:*

$$\lim_{t\to 0} \sin(1/t).$$

Lema 6.1. *Sean $\vec{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con funciones componentes $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ y t_0 un número real perteneciente al dominio de $\vec{f}$. Si $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ y $||\cdot||_2$ es la norma euclidiana, entonces*

$$\lim_{t\to t_0} ||\vec{f}(t)||_2 = ||\vec{L}||_2.$$

Demostración. Notemos que:

$$\lim_{t\to t_0} ||\vec{f}(t)||_2 = \lim_{t\to t_0} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)}.$$

Usado la Definición 6.1 combinada con las propiedades de límite de las funciones escalares y la continuidad de la función raíz cuadrada, sabemos que

$$\lim_{t\to t_0} ||\vec{f}(t)||_2 = \lim_{t\to t_0} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)} = \sqrt{\lim_{t\to t_0} \sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \ell_i^2} = ||\vec{L}||_2,$$

lo cual concluye la demostración. □

El siguiente resultado se deja como ejercicio al lector, el producto punto se denota por $\cdot$ y el producto cruz se denota por $\times$:

Lema 6.2. *Consideremos las funciones* $\vec{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *y* $\vec{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. *Además, supongamos que*

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{L} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to t_0} \vec{g}(t) = \vec{M},$$

entonces[1]*:*

i) $\lim_{t\to t_0} \{\vec{f}(t) + \vec{g}(t)\} = \lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) + \lim_{t\to t_0} \vec{g}(t) = \vec{L} + \vec{M}$,

ii) $\lim_{t\to t_0} c\vec{f}(t) = c\vec{L}$ *y* $\lim_{t\to t_0} c\vec{g}(t) = c\vec{M}$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$,

iii) $\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) = \lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) \cdot \lim_{t\to t_0} \vec{g}(t) = \vec{L} \cdot \vec{M}$,

iv) $\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) \times \vec{g}(t) = \lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) \times \lim_{t\to t_0} \vec{g}(t) = \vec{L} \times \vec{M}$.

Definición 6.2. *Sean* $\vec{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *con funciones componentes* $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *y* t_0 *un número real pertenciente al dominio de* $\vec{f}$. *Se dice que* $\vec{f}$ *es continua en* t_0 *si y sólo si sus* n *funciones componentes son continuas en* t_0. *Es decir*

$$\lim_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0),$$

lo cual es equivalente a:

$$\lim_{t\to t_0} f_i(t) = f_i(t_0) \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

De igual forma, se dice que $\vec{f}$ es continua en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si $\vec{f}$ es continua en todo $t_0 \in I$. Es fácil ver que la función del Ejemplo 6.1 es continua en $\mathbb{R}$.

Teorema 6.1. *Si la función* $\vec{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *con funciones componentes* $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *es continua en* $[a, b] \subset \mathbb{R}$, *entonces el conjunto*

$$B = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \quad t \in [\alpha, \beta] \quad \text{tal que} \quad \vec{f}(t) = \vec{x}\right\}$$

es compacto en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $\vec{x}_k$ una sucesión en B. Es decir $\vec{x}_k \in B$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tenemos que demostrar la existencia de una subsucesión $\vec{x}_{\phi(k)}$ convergente a $\vec{x} \in B$.

En efecto, notemos que si $\vec{x}_k \in B$, entonces existe $t_k \in [\alpha, \beta]$ tal que:

$$\vec{x}_k = \big(f_1(t_k), f_2(t_k), \ldots, f_n(t_k)\big).$$

[1]En el caso iv) se supone que $n = 3$.

Es decir, existe una sucesión de números reales $t_k \in [\alpha, \beta]$. Usando el Teorema de Bolzano-Weierstrass, sabemos que existe una subsucesión convergente $t_{\phi(k)}$ que verifica:

$$\lim_{k\to+\infty} t_{\phi(k)} = t^* \in [\alpha, \beta].$$

Por otro lado, cada una de la funciones $f_i\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ es continua en $[\alpha,\beta]$. Entonces, cominando la continuidad de f_i en $[\alpha,\beta]$ con la convergencia de la subsucesión $t_{\phi(k)}$, es fácil verificar que:

$$\lim_{k\to+\infty} f_i(t_{\phi(k)}) = f_i(t^*) \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Entonces, notemos que la subsucesión $\vec{x}_{\phi(k)}$ definida por:

$$\vec{x}_{\phi(k)} = \big(f_1(t_{\phi(k)}), f_2(t_{\phi(k)}), \ldots, f_n(t_{\phi(k)})\big)$$

verifica:

$$\lim_{k\to+\infty} \vec{x}_{\phi(k)} = \big(f_1(t^*), f_2(t^*), \ldots, f_n(t^*)\big) \in B,$$

lo cual concluye la demostración □

2. Derivabilidad

La siguiente definición generaliza la noción de derivada de funciones de una variable:

Definición 6.3. *Sea $\vec{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con funciones componentes $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ y supongamos que $\vec{f}$ está definida en un intervalo abierto $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Se dice que $\vec{f}$ es derivable en t_0 si el siguiente límite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)}{h}$$

existe y se denota por $\vec{f}'(t_0)$.

Proposición 11. *Sea $\vec{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con funciones componentes $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ y supongamos que $\vec{f}$ está definida en un intervalo abierto $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Entonces $\vec{f}$ derivable en t_0 si y sólo sus n funciones componentes son derivables en t_0, obteniéndose de esta forma:*

$$\vec{f}'(t_0) = \big(f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0)\big).$$

Demostración. Si $\vec{f}$ es derivable en t_0, entonces sabemos que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)}{h} = \vec{f}'(t_0).$$

Usando la Definición 6.1, se tiene que las n componentes $\big(g_1(h), \ldots, g_n(h)\big)$ de la función $\vec{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por:

$$\vec{g}(h) = \frac{\vec{f}(t_0 + h) - \vec{f}(t_0)}{h}$$

tienen límite cuando h tiende a cero. Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0} g_i(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f_i(t_0 + h) - f_i(t_0)}{h}$$

existen para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y son iguales a $f_i'(t_0)$.

Por otro lado, si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son derivables en t_0 significa (usando la misma notación) que $g_i(h) \to f_i'(t_0)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ cuando $h \to 0$. Usando una vez más la Definición 6.1 se tiene que $\vec{g}(h)$ tiene a $\big(f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0)\big)$ como límite cuando $h \to 0$, lo cual concluye la demostración. $\square$

Es fácil ver que la función definida en el Ejemplo 6.1 es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es:

$$\vec{f}'(t) = \big(\frac{1}{1+t^2}, \cos(t)\big).$$

De igual forma, la función definida en el Ejemplo 6.2 es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y su derivada es:

$$\vec{f}'(t) = \big(-\frac{1}{t^2}\cos(t), -\sin(t)\big).$$

Proposición 12. *Sea $\vec{f} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con funciones componentes $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ y supongamos que $\vec{f}$ está definida en un intervalo abierto $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Entonces si $\vec{f}$ es derivable en t_0, entonces $\vec{f}$ es continua en t_0.*

Demostración. Si $\vec{f}$ es derivable en t_0, entonces se tiene que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(t_0 + h) - f_i(t_0)}{h} = \lim_{t \to t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} = f_i'(t_0).$$

Por otro lado, sabemos que

$$\lim_{t \to t_0} (t - t_0) = 0.$$

Usando las propiedades algebraicas de los límites, sabemos que:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} \lim_{t \to t_0} (t - t_0) = \lim_{t \to t_0} f_i(t) - f_i(t_0) = 0,$$

lo cual es equivalente a

$$\lim_{t \to t_0} f_i(t) = f_i(t_0),$$

y eso es equivalente a la continuidad de f_i en t_0 para todo $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Como antes, el siguiente resultado se deja como ejercicio al lector [2]:

Lema 6.3. *Consideremos las funciones derivables $\vec{f} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $\vec{g} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:*

i) $\{\vec{f}(t) + \vec{g}(t)\}' = \vec{f}'(t) + \vec{g}'(t)$,
ii) $\{c\vec{f}(t)\}' = c\vec{f}'(t)$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$,
iii) $\{h(t)\vec{f}(t)\}' = h(t)\vec{f}'(t) + h'(t)\vec{f}(t)$ *para toda función derivable* $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
iv) $\{\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)\}' = \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)$,

Una consecuencia de la propiedad iv) del Lema anterior es el siguiente resultado:

[2] el producto punto se denota por $\cdot$

Lema 6.4. *Si $\vec{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función derivable, entonces se verifica:*

$$\frac{d}{dt}||\vec{f}(t)||_2 = \frac{\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t)}{||\vec{f}(t)||_2}.$$

cuando $\vec{f}(t) \neq \vec{0}$.

Demostración. Usando el item iv) del Lema 6.3 se tiene que:

$$\{\vec{f}(t) \cdot \vec{f}(t)\}' = \frac{d}{dt}(\vec{f}(t) \cdot \vec{f}(t)) = \vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = 2\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t).$$

Como $\vec{v} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||_2^2$, entonces se tiene:

$$\frac{d}{dt}||\vec{f}(t)||_2^2 = \vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = 2\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t).$$

Por otro lado, usando la regla de la cadena a la función $\phi(t) = ||\vec{f}(t)||_2^2$, sabemos que:

$$\frac{d}{dt}||\vec{f}(t)||_2^2 = 2||\vec{f}(t)||_2 \frac{d}{dt}||\vec{f}(t)||_2,$$

lo cual implica la igualdad:

$$\frac{d}{dt}||\vec{f}(t)||_2^2 = 2||\vec{f}(t)||_2 \frac{d}{dt}||\vec{f}(t)||_2 = 2\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t).$$

Finalmente trabajamos sobre la última igualdad diviendo por $||\vec{f}(t)||_2$.
$\square$

Definición 6.4. *Sea $\vec{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con funciones componentes $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ y supongamos que f esta definida en un intervalo abierto $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Se dice que f es k–veces derivable en t_0 sus n funciones componentes lo son. En este caso, la k–ésima derivada del vector $f(t)$ en $t = t_0$ es:*

$$\vec{f}^{(k)}(t_0) = (f_1^{(k)}(t_0), \ldots, f_n^{(k)}(t_0)).$$

De igual forma, se Se dice que f es k–veces derivable en $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ sus n funciones componentes son k–veces derivables para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Definición 6.5. *Sea $\vec{f}\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con funciones componentes $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Se dice que:*

- *$\vec{f}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en I si sus n funciones componentes son derivables con derivada continua en I.*
- *$\vec{f}$ es C^1 por trozos si $\vec{f}$ es derivable y su derivada es continua, exceptuando un número finito de puntos en I.*
- *$\vec{f}$ es de clase $\mathcal{C}^k$ en I si sus n funciones componentes son k veces derivables con k–ésimas derivadas continuas en I. Las funciones f de clase $\mathcal{C}^\infty$ en I se definen análogamente.*

Definición 6.6. *Una función $f\colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ es **regular** si $f'(t) \neq \vec{0}$ para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.*

3. Interpretación cinemática

En esta sección $\vec{M}(t)$ será útil para describir la posición de una partícula y $\vec{M}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ será una función vectorial dos veces derivable (al menos). Usualmente escribiremos:

$$\vec{M}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \quad \text{si} \quad n = 2 \quad \text{y} \quad \vec{M}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \quad \text{si} \quad n = 3.$$

Definición 6.7. *El conjunto de vectores $\vec{U} \in \mathbb{R}^n$ para los cuales existe t tal que $\vec{U} = \vec{M}(t)$ se conoce como la **trayectoria** de la partícula $\vec{M}(t)$.*

- El vector $\vec{M}'(t) = \vec{V}(t)$ se denomina el vector velocidad de la partícula al instante t. Usualmente escribiremos:

$$\vec{V}(t) = \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t)\big) \quad \text{si} \quad n = 2 \quad \text{y} \quad \vec{V}(t) = \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\big) \quad \text{si} \quad n = 3.$$

- El vector $\vec{M}''(t) = \vec{A}(t)$ se denomina el vector aceleración de la partícula al instante t. Usualmente escribiremos:

$$\vec{A}(t) = \big(x''(t), y''(t)\big) \quad \text{si} \quad n = 2 \quad \text{y} \quad \vec{A}(t) = \big(x''(t), y''(t), z''(t)\big) \quad \text{si} \quad n = 3.$$

- La velocidad absoluta de la partícula es la norma euclidiana del vector velocidad (a saber, $||\vec{V}(t)||_2$) y se denota por:

$$V(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \quad \text{si} \quad n = 2 \quad \text{y} \quad V(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \quad \text{si} \quad n = 3.$$

Finalmente, diremos que el movimiento de la partícula es *acelerado* si $V(t)$ es una función creciente. De igual forma diremos que el movimiento de la partícula es *retardado* si $V(t)$ es una función decreciente.

Teorema 6.2. *El movimiento de una partícula es acelerado en un intervalo de tiempo I si y sólo si $\vec{V}(t) \cdot \vec{A}(t) \geq 0$ para todo $t \in I$. De igual forma, es retardado en un intervalo de tiempo I si y sólo si $\vec{V}(t) \cdot \vec{A}(t) \leq 0$ para todo $t \in I$*

Demostración. Notemos que:

$$V'(t) = \frac{2\dot{x}(t)x''(t) + 2\dot{y}(t)y''(t) + 2\dot{z}(t)z''(t)}{2\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}} = \frac{\vec{V}(t) \cdot \vec{A}(t)}{||\vec{V}(t)||_2}.$$

Como el signo de $V'(t)$ coincide con el signo de $\vec{V}(t) \cdot \vec{A}(t)$, se concluye la demostración. $\square$

4. Interpretación geométrica y parametrización

Las funciones $\vec{f}\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ son un objeto de estudio privilegiado de la Geometría diferencial, la cual las define como *caminos en* $\mathbb{R}^n$.

Definición 6.8. *Denotaremos por **curva en** $\mathbb{R}^n$ a la imagen de un camino $\vec{f}\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Dicho camino $\vec{f}$ es llamado **parametrización** de la curva.*

El significado es natural para $n = 2$ pues la imagen de $\vec{f}\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una curva (en el sentido coloquial del término) en el plano.

EJEMPLO 6.3. *La imagen de* $\vec{f}\colon [0,2\pi) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definido por:*

$$\vec{f}(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

es una circunferencia con centro $(0,0)$ *y radio* $r = 1$.

EJEMPLO 6.4. *La imagen de* $\vec{g}\colon [0,\pi) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$\vec{g}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$$

también es una circunferencia con centro $(0,0)$ *y radio* $r = 1$.

Estos ejemplos son muy importantes pues nos muestran que una curva en el plano (en este caso, la circunferencia con radio uno y centro en origen) puede tener parametrizaciones distintas.

EJEMPLO 6.5. *Consideremos el cuadrado de vértices* $(0,0)$,$(1,0)$,$(1,1)$ *y* $(0,1)$. *Buscaremos una parametrización* $\vec{f}\colon I \to \mathbb{R}^2$ *de dicho cuadrado. Por eje mplo:*

$$\vec{f}(t) = \begin{cases} (t,0) & \text{si} \quad 0 \leq t < 1, \\ (1,t-1) & \text{si} \quad 1 \leq t < 2, \\ (3-t,1) & \text{si} \quad 2 \leq t \leq 3, \\ (0,4-t) & \text{si} \quad 3 \leq tz4, \end{cases}$$

DEFINICIÓN 6.9. *Si la función* $\vec{f}\colon [a,b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *es continua y* $\vec{f}(a) = \vec{f}(b)$, *entonces se dice que la imagen de* $\vec{f}$ *es una* ***curva cerrada***. *Por otro lado, si* $\vec{f}$ *es inyectiva en* $[a,b)$, *se dice que la imagen de* $\vec{f}$ *es una* ***curva cerrada simple***.

DEFINICIÓN 6.10. *Si la función* $\vec{f}\colon [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *es continua y* $\vec{f}(a) \neq \vec{f}(b)$, *entonces:*

i) *Si* $\vec{f}\colon [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *es inyectiva, entonces la imagen de* $\vec{f}$ *es una* ***curva simple***.
ii) *Los vectores* $\vec{P} = \vec{f}(a)$ *y* $\vec{Q} = \vec{f}(b)$ *se denominan los extremos de la curva. Es importante destacar que los extremos de la curva no dependen de la parametrización escogida.*

EJEMPLO 6.6. *Consideremos la linea recta que une los puntos* $(0,0)$ *y* $(1,1)$ *en el plano. Veremos dos parametrizaciones* $\vec{f}(t) = (t,t)$ *y* $\vec{g}(t) = (1-t, 1-t)$ *donde* $t \in [0,1]$.

OBSERVACIÓN 16. *Toda curva simple tiene dos* ***orientaciones*** *o* direcciones asociadas. *Notemos el caso de una curva simple con extremos* $\vec{P}$ *y* $\vec{Q}$. *Es fácil darse cuenta que hay dos tipos de parmetrizaciones: i) la parametrizaciones donde* $\vec{P}$ *es el extremo inicial y ii) las parametrizaciones donde* $\vec{P}$ *es el extremo final.*

Es importante enfatizar que las curvas cerradas simples también tienen dos orientaciones asociadas.

DEFINICIÓN 6.11. *Sea* $h\colon [a,b] \to [a_1,b_1]$ *una función inyectiva y* $\mathcal{C}^1$. *Sea* C *una curva simple parametrizada por la función* $\vec{\sigma}\colon [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^n$ *que es* $\mathcal{C}^1$ *por trozos.*

La función $\vec{\rho}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *descrita por* $\vec{\rho}(t) = \vec{\sigma}(h(t))$ *es una reparametrización de* C. *Finalmente:*

- *Si h es creciente, se dice que la reparametrización preserva la orientación.*
- *Si h es decreciente, se dice que la reparametrización invierte la orientación.*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[dr, "\vec{g}\circ\vec{f}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\vec{g}"] \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

Ejemplo 6.7. *Consideremos la semicircunferencia superior de radio $r = 1$ y centro en el origen. Es fácil ver que*

$$\vec{\sigma}(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$

es una parametrización cuyo extremo inicial es $(1, 0)$ y su extremo final es $(-1, 0)$.

Por otro lado, sabemos que $h\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ definida por $h(\theta) = -\cos(\theta)$ es inyectiva y creciente. Finalmente, sabemos que

$$\vec{\rho}(\theta) = \vec{\sigma}(h(\theta)) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad \theta \in [0, \pi]$$

es una reparametrización que preserva la orientación.

Por otro lado, usando $g\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ definida por $g(\theta) = \cos(\theta)$, obtendremos una reparametrización que invierte la orientación.

5. Algunas curvas clásicas

Ejemplo 6.8. *La imagen de la función $\vec{f}\colon [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$\vec{f}(t) = (a(t - \sin(t)), a(1 - \cos(t))) \quad \text{con } a > 0,$$

se conoce como ***Cicloide****.*

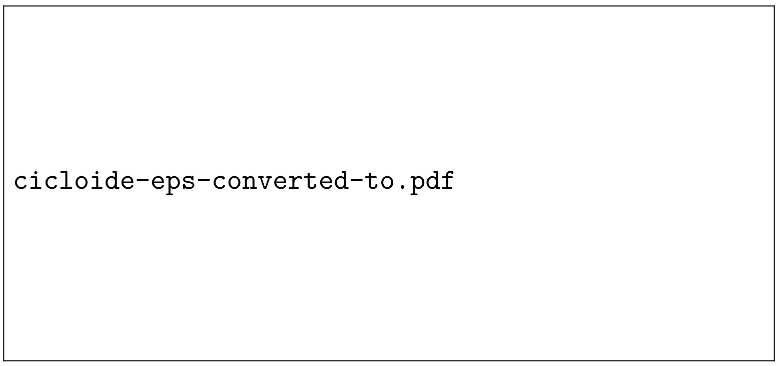

Figura 1. Gráfica de la Cicloide del Ejemplo

Ejemplo 6.9. *La imagen de la función $\vec{f}\colon [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$\vec{f}(t) = ((k-1)\sin(t) - \sin((k-1)t), (k-1)\cos(t) + \cos((k-1)t)) \quad \text{con } k > 2,$$

se conoce como ***Hipocicloide****.*

deltoide-eps-converted-to.pdf astroide-eps-converted-to.pdf

FIGURA 2. Gráficas de la hipocicloide: deltoide ($k = 3$ a la izquierda) y Astroide ($k = 4$ a la Derecha)

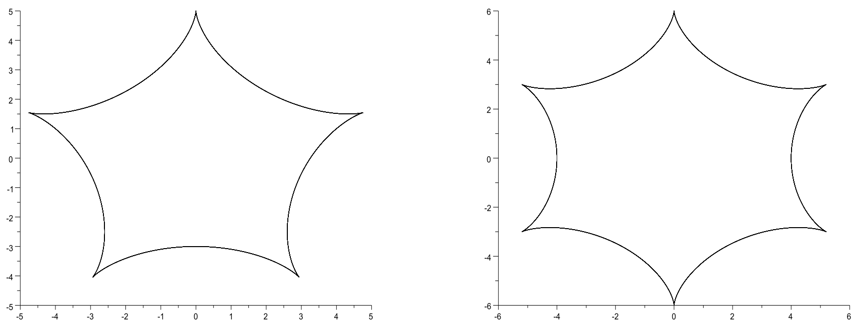

FIGURA 3. Gráficas de la hipocicloide: $k = 5$ (izquierda) y $k = 6$ (Derecha)

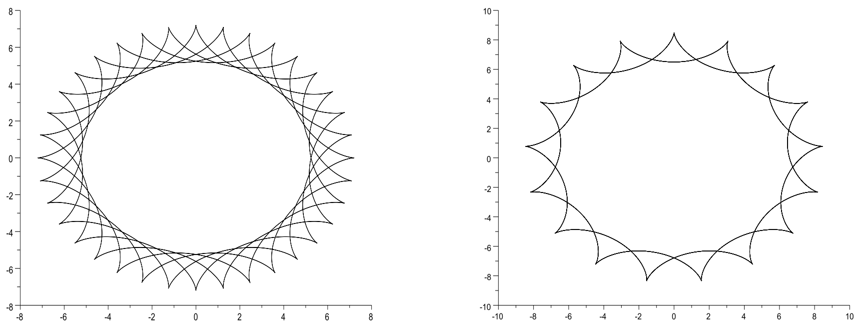

FIGURA 4. Gráficas de la hipocicloide: $k = 7{,}2$ (izquierda) y $k = 8{,}5$ (Derecha)

6. Métodos numéricos para graficas en dos y tres dimensiones (SCILAB)

SCILAB es un programa de uso libre desarrollado por el INRIA (Institute Nationale de la Recherche en Informatique et Automatique) [3]

Ejemplo 6.10. *Consideremos* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

cuyo recorrido en $\mathbb{R}^2$ *es una circunferencia de centro* $(0,0)$ *y radio* $r = 1$.

Ejemplo 6.11. *Consideremos* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definida por:*

$$f(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}, \quad a > 0, b > 0,$$

cuya imagen en $\mathbb{R}^2$ *es una elipse de centro* $(0,0)$ *y semiejes* a *y* b.

Ejemplo 6.12. *Las curvas de Lissajous* [4] *son definidas por la función* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$*:*

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(at) \\ \sin(bt) \end{pmatrix},$$

con a *y* b *reales.*

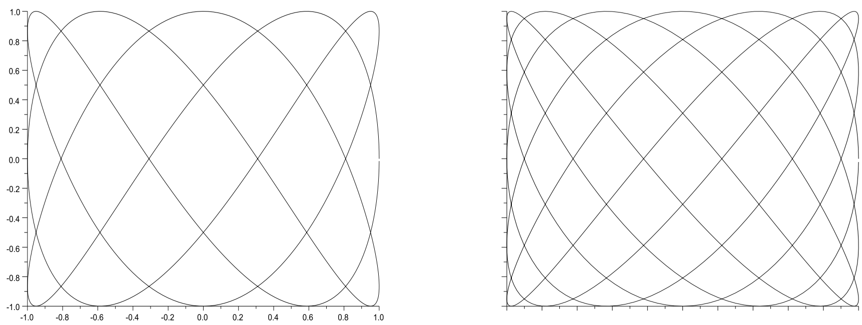

Figura 5. Izquierda: Curva de Lissajous ($a = 3$,$b = 5$). Derecha: Curva de Lissajous ($a = 5$,$b = 7$)

El gráfico de la derecha de la Figura 6.12 se obtiene con el siguiente código en SCILAB

```
x=[0:0.01:2*3.14159]';
//simple plot
plot2d(sin(5*x)),cos(7*x));
```

[3] www.scilab.org

[4] Jules Antoine Lissajous, 1822–1880.

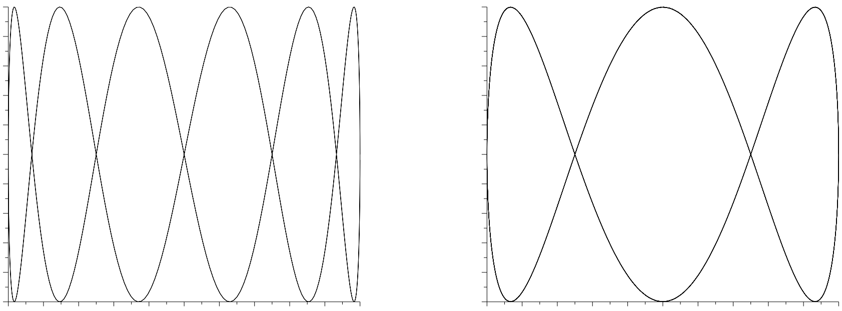

Figura 6. Izquierda: Curva de Lissajous ($a = 2$,$b = 12$). Derecha: Curva de Lissajous ($a = 5$,$b = 15$)

Ejemplo 6.13. *Consideremos* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 6.14. *Consideremos la hélice cilindrica* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

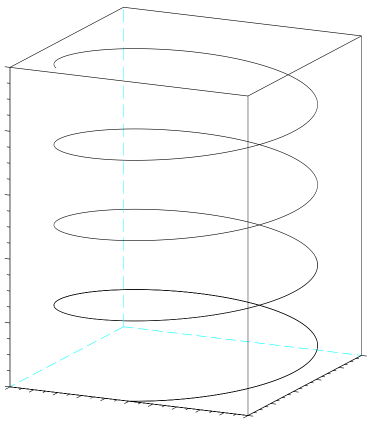

Figura 7. Gráfica de la hélice cilindrica del Ejemplo

El gráfico de la hélice cilíndrica se obtiene con el siguiente código en SCILAB

```
x=[0:0.01:2*3.14159]';
//simple plot
param3d(cos(x)),sin(x),x);
```

7. Integral de línea

DEFINICIÓN 6.12. *Sean $\vec{\sigma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una función derivable por trozos y $\vec{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua tal la imagen de $\vec{\sigma}$ es un subconjunto del dominio de $\vec{F}$. La* ***integral de línea*** *del campo $\vec{F}$ a lo largo de $\vec{\sigma}$ se define por:*

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot ds = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\, dt. \tag{6.1}$$

Si $\vec{F}(x,yz) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, a veces es muy conveniente escribir:

$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot ds = \int_{\vec{\sigma}} P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz$$

EJEMPLO 6.15. *Sean $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, xy, 1)$ y $\vec{\sigma}(t) = (t,t^2,1)$ con $t \in [0,1]$. Notemos que*

$$\begin{array}{rcl} \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot ds & = & \int_0^1 (t^2, t^3, 1) \cdot (1, 2t, 0)\, dt \\ & = & \int_0^1 (t^2 + 2t^4)\, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}\Big|_0^1 \\ & = & \frac{11}{15} \end{array}$$

EJEMPLO 6.16. *Sean $\vec{F}(x,y,z) = (\cos(z), e^x, e^y)$ y $\vec{\sigma}(t) = (1, t, e^t)$ con $t \in [0,2]$. Notemos que*

$$\begin{array}{rcl} \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot ds & = & \int_0^2 (\cos(e^t), e, e^t) \cdot (0, 1, e^t)\, dt \\ & = & \int_0^2 (e + e^{2t})\, dt = 2e + \left(\frac{1}{2} e^{4t}\Big|_0^1\right) \\ & = & 2e + \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right) \end{array}$$

El siguiente resultado relaciona integrales de línea y parmetrización

TEOREMA 6.3. *Sea $\vec{\sigma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ la parametrización de una curva C y $\vec{\gamma}\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ es una reparametrización de $\vec{\sigma}$. Entonces:*

- *Si $\vec{\gamma}$ preserva la orientación, entonces:*
$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot ds = \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot ds,$$
- *Si $\vec{\gamma}$ invierte la orientación, entonces:*
$$\int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot ds = -\int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot ds.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\vec{\gamma}$ preserva la orientación, es decir, existe una función creciente $h\colon [c,d] \to [a,b]$ tal que $\vec{\sigma}(h(t)) = \vec{\gamma}(t)$. Luego, con el cambio de variable $s = h(t)$ se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \int_{\vec{\gamma}} \vec{F} \cdot ds & = & \int_c^d \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt \\ & = & \int_c^d \vec{F}(\vec{\sigma}(h(t))) \cdot \vec{\sigma}'(h(t))h'(t)\, dt \\ & = & \int_a^b \vec{F}(\vec{\sigma}(s) \cdot \vec{\sigma}'(s)\, ds \\ & = & \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot ds. \end{array}$$

El otro caso, se deja al lector. □

TEOREMA 6.4 (Generalización del Teorema fundamental del cálculo). *Sean $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ y C una curva parametrizada por $\vec{\sigma} \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, la cual es derivable. Entonces se tiene que:*

$$\int_{\vec{\sigma}} f \cdot ds = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a)). \tag{6.2}$$

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, realizaremos la demostración con $n = 3$. Para ello construímos la función auxiliar $G \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $G(t) = f(\vec{\sigma}(t)) = f(\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t))$.

Usando la regla de la cadena, se deduce que:

$$\begin{array}{rcl} G'(t) & = & \frac{\partial f(\vec{\sigma}(t))}{\partial x}\sigma_1'(t) + \frac{\partial f(\vec{\sigma}(t))}{\partial y}\sigma_2'(t) + \frac{\partial f(\vec{\sigma}(t))}{\partial z}\sigma_2'(t) \\ & = & \nabla f(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}(t). \end{array}$$

Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot ds & = & \int_a^b G'(t)\, dt \\ & = & G(b) - G(a) \\ & = & f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a)), \end{array}$$

lo cual concluye la demostración. □

OBSERVACIÓN 17. *Es interesante notar que si $\vec{\sigma}(a) = \vec{\sigma}(b)$, se tiene que*

$$\int_{\vec{\sigma}} f \cdot ds = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a)) = 0.$$

EJEMPLO 6.17. *Sea $\vec{\sigma} \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\vec{\sigma}(t) = (t^4/4, \sin^3(\pi t/2))$ y el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (y, x)$. Notemos que*

$$\begin{array}{rcl} \int_{\vec{\sigma}} \vec{F} \cdot ds & = & \int_0^1 \Big(\sin^3(\pi t/2), t^4/4\Big) \cdot \Big(t^3, \frac{3\pi}{2}\sin^2(\pi t/2)\cos(\pi t/2)\Big)\, dt \\ & = & \int_0^1 t^3 \sin^3(\pi t/2) + \frac{3\pi t^4}{8}\sin^2(\pi t/2)\cos(\pi t/2)\, dt. \end{array}$$

Antes de continuar el cálculo, notemos que $\vec{F}(x, y)$ verifica la propiedad

$$\vec{F}(x, y) = \nabla f(x, y) \quad \text{donde} \quad f(x, y) = xy.$$

Por lo tanto, aplicando el teorema anterior se puede obtener el resultado de un modo mas simple:

$$\begin{array}{rcl} \int_{\vec{\sigma}} f \cdot ds & = & f(\vec{\sigma}(1)) - f(\vec{\sigma}(0)) \\ & = & f(1, 1/4) - f(0, 0) \\ & = & \frac{1}{4}. \end{array}$$

El resultado anterior sugiere la siguiente definición:

DEFINICIÓN 6.13. *Se dice que el campo vectorial* $\vec{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es un* ***campo conservativo*** *si existe una función (llamada* ***potencial****)* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\vec{F}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}).$$

El siguiente resultado nos entrega una condición necesaria y suficiente para determinar cuando un campo es conservativo para dimensiones $n = 2, 3$:

TEOREMA 6.5. *Sea* $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de clase* $\mathcal{C}^1$*, entonces existe* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$$

si y sólo si $Rot\vec{F} = 0$.

Bibliografía

[1] B. Aebischer. *Analyse. Fonctions de Plusieures Variables & Géométrie Analytique.* Librairie Vuibert, Paris (2011).

[2] T. Apostol. *Análisis Matemático.* Ed. Reverté. Barcelona.

[3] B. Ba, G. Vinel. *Géométrie Différentielle.* Masson, Paris (1994).

[4] L. Brand. *Análisis Vectorial.* Cía Editorial Continental, México (1965).

[5] B.P. Demidovich. *5000 Problemas de Análisis Matemático.* Paraninfo, Madrid (1989).

[6] W.H. Fleming. *Funciones de Varias Variables.* Cía Editorial Continental, México (1969).

[7] K. Hoffman, R. Kunze. *Algebra Lineal.* Prentice Hall (1972).

[8] E. Kreyzig. *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley (1978).

[9] J.E. Marsden, A.J. Tromba. *Cálculo Vectorial.* Addison Wesley Iberoamericana (1991).

[10] J.M. Mazón–Ruiz. *Cálculo Diferencial. Teoría y Problemas.* Mc Graw–Hill, Madrid (1997).

[11] L. Oubiña. *Introducc ión a la Teoría de Conjuntos.* Editorial Universitari de Buenos Aires, Sexta edición, Buenos Aires (1971).

[12] C. Pita. *Cálculo Vectorial.* Prentice–Hall Hispanoamericana. México, 1995.

[13] I. Uña Juárez, J. San Martin, V. Tomeo. *Cálculo en Varias Variables.* Alfaomega, México (2013).

[14] R.E. Williamson, R.H. Crowell, H.F. Trotter. *Cálculo de Funciones Vectoriales.* Prentice Hall (1975).