Curso: Cálculo en Varias Variables (Pedagogía)
Profesor: Gonzalo Robledo
Ayudante: Fabián Hidalgo

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Control 3

Viernes 17 de Agosto del 2018

1. (3 pts) Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

Solución: f es una función de clase C^2 al ser un polinomio en dos variables.
Las derivadas parciales de primer orden de f en todo punto (x, y) son
$f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$ y $f_y(x, y) = 4y^3 - 4x$ **(0.1p)**.
Luego, los puntos críticos de la función vienen dados por las soluciones del sistema de ecuaciones
$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$ **(0.3p)**, que equivalentemente se puede reescribir como $\begin{cases} x^3 = y \\ x = y^3 \end{cases}$

Reemplazando $y = x^3$ en la ecuación $x = y^3$ se obtiene la ecuación $x = x^9$, cuyas únicas soluciones reales son $x \in \{-1, 0, 1\}$. **(0.1p c/u)**

Si $x = -1$, entonces $y = (-1)^3 = -1$; si $x = 0$, entonces $y = 0^3 = 0$; y si $x = 1$, entonces $y = 1^3 = 1$ **(0.1p c/u)**. Luego, los puntos críticos de f son $(-1, -1), (0, 0), (1, 1)$ **(0.3p)**.

Las segundas derivadas parciales de f en todo punto (x, y) son

$f_{xx}(x, y) = 12x^2, f_{xy}(x, y) = -4, f_{yx}(x, y) = -4, f_{yy}(x, y) = 12y^2$ **(0.2p)**

Luego, la matriz Hessiana de f en (x, y) está dada por

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{yx}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

En particular, se tiene que

- $H_f(-1, -1) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$ **(0.2p)** (determinante y traza positivos)
- $H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ **(0.2p)** (determinante negativo)
- $H_f(1, 1) = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$ **(0.2p)** (determinante y traza positivos)

Finalmente, por criterio de la segunda derivada se concluye que:

- f tiene mínimos relativos en $(-1, -1)$ y $(1, 1)$ **(0.3p c/u)**
- f tiene un punto de ensilladura en $(0, 0)$ **(0.3p)**

2. (3 pts) Encuentre la distancia más corta entre el punto $(1,1,1)$ y el plano definido por la ecuación

$$x+y+z=1$$

Solución: Sea $(x,y,1-x-y)$ un punto cualquiera del plano. La distancia entre este punto y el punto $(1,1,1)$ está dada por

$d(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(x+y)^2}$ **(0.4p)**

Para simplificar el problema, estudiaremos los puntos críticos de la función

$$f(x,y)=d(x,y)^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(x+y)^2$$

Esta es una función de clase C^2 al ser un polinomio en dos variables. Además, se tiene que

$f_x(x,y)=2(x-1)+2(x+y)=4x+2y-2$ **(0.1p)**
$f_y(x,y)=2(y-1)+2(x+y)=2x+4y-2$ **(0.1p)**

Luego, los puntos críticos son las soluciones del sistema $\begin{cases} 4x+2y-2=0 \\ 2x+4y-2=0 \end{cases}$ **(0.3p)** cuya única solución es $(x,y)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, por lo tanto este es el único punto crítico de f. **(0.4p)**

Las segundas derivadas parciales de f son
$f_{xx}(x,y)=4,\quad f_{xy}(x,y)=2,\quad f_{yx}(x,y)=2,\quad f_{yy}(x,y)=4$ **(0.1p c/u)**

Entonces la matriz Hessiana de f en todo punto (x,y) es $H_f(x,y)=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}(x,y)=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

En particular, se tiene que $H_f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **(0.4p)**, matriz cuyo determinante es positivo y cuya traza es positiva. Luego, por criterio de la segunda derivada, se sigue que f tiene un mínimo relativo en el punto $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ **(0.4p)**, y dado que la función f es derivable en todo su dominio (que es un abierto), se sigue que el mínimo tiene que ser global **(0.2p)**, y dado que f tiene su mínimo global en $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, se sigue d también tiene su mínimo global en $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Así, el punto buscado es $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3})=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ y la distancia más corta es

$d(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\sqrt{(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ **(0.3p)**