Curso: Cálculo en Varias Variables (Pedagogía)
Profesor: Gonzalo Robledo
Ayudante: Fabián Hidalgo

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ayudantía 12

Miércoles 02 de Mayo del 2018

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Use la definición de derivada direccional para calcular $D_{\vec{v}}f(1, 1, 1)$ para $\vec{v} = (2, 1, 3)$ y $\vec{v} = (1, 1, 1)$.
   Verifique que $D_{\vec{v}}f(1, 1, 1) = Df(1, 1, 1)\vec{v}$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y, z) = 5x + 8y - 7z$. Calcule la derivada direccional de esta función en el punto $(-1, 7, 4)$ con respecto al vector $\vec{v} = (-2, 3, 1)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^2y + xy^2$. Determine condiciones sobre $a, b \in \mathbb{R}$ para que la derivada direccional de la función f en el punto (a, b) con respecto al vector $\vec{v} = (b, a)$ sea igual a $(a + b)^3$.

4. Supongamos que un valle está modelado por la función $f(x, y) = \dfrac{1}{2}xy + \cos(x)$.
   Un excursionista, que se ubica en el punto (π, π), está bajando a un pueblo que se ubica en los alrededores del punto $(0, 0)$. Encuentre la dirección por la cual el caminante tiene el descenso más pronunciado y calcule la tasa de cambio en esa dirección.

5. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones tales que todas sus derivadas parciales existen. Pruebe que
$$\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$$

6. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y, z) = ax^2y + bxy^2 + cxz^2$. Encuentre valores de a, b, c tales que $\nabla f(1, 1, 1)$ sea paralelo al vector $\vec{e} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}(1, 5, 0)$ y la derivada direccional de f en el punto $(1, 1, 1)$ en la dirección de $\vec{e}$ sea igual a 13.

Propuestos:

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2y, xy^2)$. Calcule la matriz jacobiana de f y determine si f es diferenciable. Sea f_n la composición de f consigo misma n veces $(n \geq 1)$. Pruebe que la matriz jacobiana de f_n en $(1, 1)$ es $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n$

8. Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Calcule ∇f para la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - b^T\mathbf{x} + c$$