Curso: Cálculo en Varias Variables (Pedagogía)
Profesor: Gonzalo Robledo
Ayudante: Fabián Hidalgo

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ayudantía 9

Miércoles 18 de Abril del 2018

1. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función simétrica, es decir, cumple que $f(x,y) = f(y,x)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que las derivadas parciales de f existen en este punto. Pruebe que las derivadas parciales también existen en el punto (y_0, x_0).

2. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $\vec{F}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$, una función tal que f_1 y f_2 cumplen las hipótesis del problema anterior en el punto (x_0, y_0). ¿Qué relación existe entre las matrices jacobianas de $\vec{F}$ en los puntos (x_0, y_0) e (y_0, x_0)?

3. Sea $f : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $f(x,y) = (e^{x^y}, e^{y^x})$. Calcule las derivadas parciales de esta función y determine su matriz jacobiana.

4. Calcule las derivadas parciales de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \displaystyle\int_{xy^2+\cos(x)}^{1+x^2+3y^4} \frac{e^{4t}}{t^2+1} dt$.

5. Demuestre que la función $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$ es solución de la ecuación en derivadas parciales
$$y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

6. Sean $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tres funciones cuyas derivadas parciales existen. Considere la función $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$\vec{F}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(y,z), f_3(z)).$$
Demuestre que la matriz jacobiana de $\vec{F}$ es triangular (superior o inferior)?