

Ayudantía 7

Viernes 06 de Abril del 2018

1. Utilice la definición $\epsilon - \delta$ de límite para demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-1)} x^2 + 2xy = 3$.

Ayuda: Use que $x = (x - 3) + 3$ e $y = (y + 1) - 1$.

2. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = \frac{1}{\|(x, y)\|_2} (x^2, y^2)$ tiene límite en $(0, 0)$, y calcúlelo.

3. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{xy}{\|(x, y)\|_2^2}$. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$$

y que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe.

4. (Ejercicio) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\|(x, y)\|_2^2}$.

Demuestre que:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1$.
- b) $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -1$.
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ no existe.

5. Determine si existen los siguientes límites:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cos(y) - y \cos(x) - x + y}{x^2 + y^2}$ (Ayuda: Recuerde que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(z)}{z^2} = \frac{1}{2}$)