

Ayudantía 4

Viernes 23 de Marzo del 2018

1. En la ayudantía pasada se demostró que el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > a\}$ es abierto, y se dejó como ejercicio demostrar que el conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < b\}$ es abierto. Usaremos estos conjuntos para encontrar más conjuntos abiertos y cerrados.
 - a. Demuestre que el conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < y < b\}$ es abierto.
 - b. Demuestre que el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < y < b \wedge (|x|^\pi + |y|^\pi)^{\frac{1}{\pi}} < 2\}$ es abierto.
 - c. Demuestre que los conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq c\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq d\}$ son cerrados.
 - d. Demuestre que el conjunto $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d\}$ es cerrado.
2. Demuestre que la función $N(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$ es una norma. Demuestre que N es equivalente a $\|\cdot\|_2$.
3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ arbitrario y sean N y M dos normas en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que A es acotado según la norma N si y sólo si es acotado según la norma M .
Conclusión: En $\mathbb{R}^n$, la propiedad de ser acotado no depende de la norma escogida, pues todas son equivalentes.
4. Determine si los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados y/o acotados.
 - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 10\}$
 - $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x^4 + y^4 < 7\}$
 - $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| + \max\{|x|, |y|\}\}$

Problemas Pendientes Ayudantía 4

Viernes 23 de Marzo del 2018

Problema 2:

Sea $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ definida por $N(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$.

Nos quedaron pendientes demostrar la desigualdad triangular y la equivalencia con la norma euclídeana.

- a. Sean $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$ dos puntos arbitrarios del plano. Debemos probar que se cumple la siguiente desigualdad:

$$N(x + a, y + b) \leq N(x, y) + N(a, b),$$

es decir,

$$\sqrt{(x + a)^2 + (x + a)(y + b) + (y + b)^2} \leq \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{a^2 + ab + b^2}$$

Note que ambos lados de la desigualdad son no-negativos, entonces podemos tomar cuadrados para obtener una desigualdad **equivalente**:

$$\left(\sqrt{(x + a)^2 + (x + a)(y + b) + (y + b)^2} \right)^2 \leq \left(\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{a^2 + ab + b^2} \right)^2.$$

Desarrollando algebraicamente ambos lados de la desigualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned} x^2 + 2ax + a^2 + xy + bx + ay + ab + y^2 + 2by + b^2 \\ \leq \\ x^2 + xy + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + xy + y^2)(a^2 + ab + b^2)} + a^2 + ab + b^2 \end{aligned}$$

Cancelamos los términos que aparecen en ambos lados de la desigualdad, quedándonos:

$$2ax + ay + bx + 2by \leq 2\sqrt{(x^2 + xy + y^2)(a^2 + ab + b^2)}.$$

Problema Pendiente Ayudantía 4

Viernes 23 de Marzo del 2018

Aquí podemos distinguir dos casos:

- I. Si el lado izquierdo de la desigualdad es negativo, es decir, $2ax + ay + bx + 2by < 0$, entonces la desigualdad anterior se cumplirá trivialmente, ya que el lado derecho siempre va a ser mayor o igual que 0.
- II. Por otro lado, si el lado izquierdo de la desigualdad es no-negativo, entonces podemos tomar cuadrados nuevamente, obteniendo la siguiente desigualdad equivalente:

$$(2ax + ay + bx + 2by)^2 \leq 4(x^2 + xy + y^2)(a^2 + ab + b^2)$$

Desarrollando, se obtiene que

$$\begin{aligned} 4a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + 4b^2y^2 + 4a^2xy + 4abx^2 + 8abxy + 2abxy + 4aby^2 + 4b^2xy \\ \leq \\ 4a^2x^2 + 4abx^2 + 4b^2x^2 + 4a^2xy + 4abxy + 4b^2xy + 4a^2y^2 + 4aby^2 + 4b^2y^2 \end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes en la ecuación, nos queda:

$$6abxy \leq 3a^2y^2 + 3b^2x^2$$

Simplificando por 3 y moviendo todos los términos al lado derecho, obtenemos:

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$$

Esta última desigualdad claramente es verdadera para todos los $(a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, por lo tanto la desigualdad triangular

$$N(a + x, b + y) \leq N(a, b) + N(x, y)$$

también es verdadera para todos los $(a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, y así finaliza nuestra demostración. $\square$

- b. Ahora demostraremos que esta norma N es equivalente a la norma $\|\cdot\|_2$. Debemos encontrar dos constantes $a, b > 0$ tales que $a\|(x, y)\|_2 \leq N(x, y) \leq b\|(x, y)\|_2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto cualquiera. Observe que:

- Del curso de Cálculo 1, sabemos que $x^2 + y^2 \geq 2xy$, lo que implica que

$$N(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2} \leq \sqrt{x^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} + y^2} = \sqrt{\frac{3}{2}(x^2 + y^2)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \|(x, y)\|_2$$

- Por otro lado, se tiene que

$$N(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2} = \sqrt{\frac{x^2 + (x + y)^2 + y^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \|(x, y)\|_2$$

Por lo anterior, tenemos que

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \|(x, y)\|_2 \leq N(x, y) \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \|(x, y)\|_2 \right)$$

De ese modo, se concluye la equivalencia entre ambas normas.