Curso: Cálculo en Varias Variables (Pedagogía)
Profesor: Gonzalo Robledo
Ayudante: Fabián Hidalgo

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ayudantía 3

Miércoles 21 de Marzo del 2018

1. Sea $\vec{x} = (\vec{x_1}, .., \vec{x_n}) \in \mathbb{R}^n$ y sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Demuestre que

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \left(|x_1| + ... + |x_n|\right) \leq \left(|x_1|^p + ... + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

   Ayuda: Considere el vector $\vec{y} = (1, .., 1) \in \mathbb{R}^n$ y utilice un resultado visto en clases que involucre p y q. ¿Qué ocurriría si ahora dejamos que $\vec{y} = (a, .., a) \in \mathbb{R}^n$, con $a \in \mathbb{R}$ una constante?

2. Demuestre que si $\{\vec{x_1}, ..., \vec{x_k}\}$ es un conjunto ortogonal de vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$||\vec{x_1} + ... + \vec{x_k}||_2^2 = ||\vec{x_1}||_2^2 + ... + ||\vec{x_k}||_2^2.$$

3. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tales que $||\vec{x}||_2 = ||\vec{y}||_2$. Demuestre que los vectores $\vec{x} + \vec{y}$ y $\vec{x} - \vec{y}$ son ortogonales. ¿Será cierta la afirmación recíproca?

4. Sea $N : \mathbb{R}^4 \to [0, \infty)$ la función definida por

$$N(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$$

   Pruebe que N es una norma.

5. Demuestre que toda norma en $\mathbb{R}$ es de la forma $||x|| = a|x|$, donde $a > 0$ es una constante.
   Ayuda: $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo, lo que implica que todo número real puede ser visto como escalar o como vector. Puede resultarle conveniente considerar $x \in \mathbb{R}$ como un escalar en lugar de un vector.

6. a. Demuestre que el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > a\}$ es abierto.
   b. Ejercicio: Demuestre que el conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < b\}$ es abierto.

Problemas Pendientes Ayudantía 3

Miércoles 21 de Marzo del 2018

- Problema 1 Sea $\vec{x} = (\vec{x_1}, .., \vec{x_n}) \in \mathbb{R}^n$ y sean $p, q > 1$ tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Demuestre que

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \left(|x_1| + ... + |x_n|\right) \leq \left(|x_1|^p + ... + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Solución: Consideremos el vector $\vec{y} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$.
Por desigualdad de Hölder, aplicada a los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, se tiene que

$$\left(|x_1 \cdot y_1| + ... + |x_n \cdot y_n|\right) \leq \left(|x_1|^p + ... + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(|y_1|^q + ... + |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Reemplazando $y_1 = y_2 = ... = y_n = 1$, se obtiene que

$$\left(|x_1| + ... + |x_n|\right) \leq \left(|x_1|^p + ... + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot n^{\frac{1}{q}}$$

Y dado que $n^{\frac{1}{q}} > 0$, podemos pasar ese factor dividiendo, y así se concluye que

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}} \left(|x_1| + ... + |x_n|\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \left(|x_1| + ... + |x_n|\right) \leq \left(|x_1|^p + ... + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- Problema 6a Demuestre que el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > a\}$ es abierto.

  Solución: Sea $(x_0, y_0) \in A$ un punto arbitrario. El problema consiste en encontrar una bola abierta de centro (x_0, y_0) que esté completamente contenida en A. Para fijar ideas, en ayudantía hicimos un gráfico del cual dedujimos que un buen candidato a radio era $r = y_0 - a$. Consideremos, entonces, la bola abierta

  $$B_{||\cdot||_2}((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y) - (x_0, y_0)||_2 < r\}$$

  Queremos demostrar que $B_{||\cdot||_2}((x_0, y_0), r) \subset A$. Para ello, lo que haremos será tomarnos un punto (x, y) de esa bolita y demostrar que ese punto **debe** estar en A.

  Para ese (x, y), se tiene que

  $$||(x, y) - (x_0, y_0)||_2 < r,$$

  es decir,

  $$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$$

  Además, sabemos que

  $$\sqrt{(y - y_0)^2} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

  Entonces

  $$\sqrt{(y - y_0)^2} < r$$

  Recordemos que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $\sqrt{a^2} = |a|$, entonces la desigualdad anterior se puede reescribir como

  $$|y - y_0| < r$$

  También recordemos que $|a| < k \Leftrightarrow -k < a < k$. Entonces

  $$-r < y - y_0 < r$$

  Lo que implica que

  $$y_0 - r < y < y_0 + r$$

  Pero dijimos que $r = y_0 - a$, entonces

  $$y_0 - (y_0 - a) < y < y_0 + (y_0 - a)$$

  $$\Leftrightarrow$$

  $$a < y < 2y_0 - a$$

  Como $y > a$, se va a tener que $(x, y) \in A$, que era a lo que queríamos llegar.

  Por lo tanto, como (x, y) era un punto arbitrario de la bola, efectivamente se cumplirá que

  $$B_{||\cdot||_2}((x_0, y_0), r) \subset A$$

  Finalizando así la demostración.