Curso: Cálculo en Varias Variables (Pedagogía)
Profesor: Gonzalo Robledo
Ayudante: Fabián Hidalgo

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ayudantía 2

Viernes 16 de Marzo del 2018

1. Sea $N : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la función definida por $N(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3|x_1| + \sqrt{2x_2^2 + \max\{4|x_3|, 2|x_4|\}^2}$. Demuestre que N es una norma sobre $\mathbb{R}^4$.

2. Determine si la función $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $N(x, y) = \min\{|x|, |y|\}$ es una norma.

3. ¿Existen vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tales que $||\vec{x}||_2 = 3$, $||\vec{y}||_1 = 1$ y $||\vec{x} + \vec{y}||_2 = 5$?

4. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tales que $||\vec{x}||_2 = 4, ||\vec{y}||_2 = 5$ y $||\vec{x} + \vec{y}||_2 = 7$. Calcule $||\vec{x} - \vec{y}||_2$.

5. Utilice la desigualdad de Cauchy-Schwarz para demostrar que si $x_1, x_2, ..., x_n$ son números reales cualesquiera, entonces
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

6. Demuestre que si $p \in (0, 1)$, entonces $|| \cdot ||_p$ no es una norma.

7. Dado $p \geq 1$ arbitrario, demuestre que las normas $|| \cdot ||_p$ y $|| \cdot ||_\infty$ son equivalentes.