Curso: Cálculo en Varias Variables (Pedagogía)
Profesor: Gonzalo Robledo
Ayudante: Fabián Hidalgo

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ayudantía 1

Miércoles 14 de Marzo del 2018

1. Sea N una norma en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $|N(\vec{x}) - N(\vec{y})| \leq N(\vec{x} + \vec{y})$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

2. Considere la función $||\vec{x}||_1 = |x_1| + ... + |x_n|$.
   a. Demuestre que $|| \cdot ||_1$ es una norma en $\mathbb{R}^n$
   b. (Ejercicio) Para $n \in \{1, 2, 3\}$ y $R > 0$, grafique el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)||_1 < R\}$.

3. Determine si la función $N(\vec{x}) = ||\vec{x}||_1 + ||\vec{x}||_2$ es una norma en $\mathbb{R}^n$

4. a. Sean N una norma en $\mathbb{R}^n$ y $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Demuestre que la función $||\vec{x}||_A = N(A\vec{x})$ define una norma en $\mathbb{R}^n$. ¿Que ocurriría si A no fuera invertible?
   b. Demuestre que la función $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $N(x_1, x_2) = \left(\dfrac{x_1^2}{9} + 4x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$ es una norma.

5. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Demuestre que la función $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como $N(\vec{x}) = ||\vec{x}||_2 + ||A\vec{x}||_2$ es una norma.

6. (Ejercicio) Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.
   a. Demuestre que $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = ||\vec{x}||_2 \cdot ||\vec{y}||_2$ si y sólo si existe un escalar no nulo λ tal que $\vec{y} = \lambda\vec{x}$.
   b. Deduzca que $||\vec{x} + \vec{y}||_2 = ||\vec{x}||_2 + ||\vec{y}||_2$ implica que $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, con $\lambda > 0$.

7. Demuestre las siguientes identidades:
   a. Identidad de Polarización: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple
   $$\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{1}{4}\Bigg(||\vec{x} + \vec{y}||_2^2 - ||\vec{x} - \vec{y}||_2^2\Bigg)$$
   b. Ley del Paralelógramo: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple
   $$||\vec{x} + \vec{y}||_2^2 + ||\vec{x} - \vec{y}||_2^2 = 2\Big(||x||_2^2 + ||y||_2^2\Big)$$