

Capítulo 6: Ondas, Óptica y Plasmas

En este capítulo discutiremos como construir soluciones a la ecuaciones de Maxwell.

Índice

1. Soluciones de ondas con $\epsilon, \mu = \text{constante}$	3
1.1. Interfase plana	4
2. Física de plasmas: medio no trivial	5
2.1. Propagación en un medio escalar homogéneo	7
2.2. Por que $\omega(k)$?	8
2.2.1. Caso simple I: Conductores	9
2.2.2. Caso simple II: Propagación ionosférica	10
2.3. Trayectoria de partículas en campos electromagnéticos	11
2.4. Ecuación de Vlasov	11
2.4.1. Momento v^0	14
2.4.2. Momento v	14
2.4.3. Momento v^2	15
2.5. Ecuaciones de fluido	15
2.6. La ley de Ohm	17
2.7. Algunos parámetros relevantes	17
2.8. Ecuaciones de MHD	17
2.8.1. Neutralidad	18
2.8.2. Electro protón plasma	19
2.8.3. Perturbación lineal en plasma homogéneo	22
2.9. Shumann Resonances	22
3. Óptica del rayo, con $n(x)$	22
3.1. Aproximación paraxial	25
3.2. Solución numérica	27
3.3. Principio de Fermat	27
3.4. Suma de fases e integrales de camino	28
3.5. Paralelismo con la mecánica clásica y cuántica	28
4. Superposición de amplitudes	29
4.1. Medio dispersivo	29
4.2. Medio disipativo	30

1. Soluciones de ondas con $\epsilon, \mu = \text{constante}$

En el espacio libre, las ecuaciones de Maxwell dan soluciones que se propagan y que satisfacen la ecuación de ondas para las constantes ϵ, μ

$$\nabla^2 E - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

Hemos visto que si tenemos una fuente puntual se generará una onda esférica. Lejos de la fuente esta onda se asemeja a una onda plana. También, la solución a la ecuación de ondas puede ser descrita por una superposición de ondas planas, por lo tanto, es natural estudiar el comportamiento de las ondas planas en un medio

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \vec{E}_o e^{ik \cdot x - i\omega t} \\ B(x, t) &= \vec{B}_o e^{ik \cdot x - i\omega t} \end{aligned}$$

Se entiende que debemos tomar la parte real al finalizar el calculo. Si usamos esta solución en las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, obtenemos

$$\begin{aligned} k \cdot E &= 0 & k \times E &= \frac{\omega}{c} B \\ k \cdot B &= 0 & k \times B &= -\frac{\omega\mu\epsilon}{c} E \end{aligned}$$

lo que implica que k, E y B forman un sistema ortogonal de vectores. Definiendo $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ podemos demostrar que

$$k = \frac{\omega}{c} n \hat{k} \quad \hat{k} = \frac{\vec{E}_o \times \vec{B}_o}{|\vec{E}_o \times \vec{B}_o|}$$

y que además

$$\vec{B}_o = n \hat{k} \times E_o$$

Notemos que en general podemos definir la onda con ω, E_o y \hat{k} . En este caso particular, tenemos una relación de dispersión

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu\epsilon$$

para el espacio vacío. Generalizaremos esto mas adelante.

En principio n puede depender de la frecuencia también, como en un medio dispersivo. Esto será relevante sólo cuando estudiemos pulsos más generales, como una superposición de ondas.

Definamos las dos direcciones perpendiculares a $k = k\hat{z}$. Como la amplitud E puede ser un número complejo, el campo eléctrico

$$E(x, t) = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y}) e^{ikz - i\omega t}$$

puede representar ondas circulares

$$E(x, t) = E_o(\hat{x} + i\hat{y}) e^{ikz - i\omega t}$$

o elípticas polarizadas.

1.1. Interfase plana

Asumamos que sobre la interfase plana entre dos medios, con $n = \text{constante}$ (y real), tenemos una onda incidente, lo que genera una onda refractada, y una onda transmitida. El cuadrado de las amplitudes de estas ondas definen la transmisión y el coeficiente de refracción. Para $z < 0$ tenemos

$$E_R(x, t) = e^{-i\omega t} \left(\vec{E}_o e^{ik \cdot x} + \vec{E}_1 e^{ik_1 \cdot x} \right) \quad B_R(x, t) = e^{-i\omega t} n_1 \left(\hat{k} \times \vec{E}_o e^{ik \cdot x} + \hat{k}_1 \times \vec{E}_1 e^{ik_1 \cdot x} \right)$$

y para $z > 0$ tenemos

$$E_L(x, t) = e^{-i\omega t} \vec{E}_2 e^{ik_2 \cdot x} \quad B_L(x, t) = n_2 \hat{k}_2 \times \vec{E}_2 e^{ik_2 \cdot x}$$

Notemos que

$$|k_1| = |k|$$

dado que $k = \omega n / c$. Para tener soluciones compatibles sobre todo el plano $z = 0$, debemos requerir que las fases sean todas iguales, por lo tanto

$$k \cdot x|_{z=0} = k_1 \cdot x|_{z=0} = k_2 \cdot x|_{z=0}$$

Esto implica que los k están todos en el mismo plano. También obtenemos la ley de Snell

$$\begin{aligned} n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin \theta_2 \\ \theta_1 &= \theta'_1 \end{aligned}$$

donde los rayos que se definen en la Fig. 1 representan la normal de las superficies de fase constante de cada onda. Veremos esto en detalle mas adelante.

Debemos aplicar las condiciones de borde para los campos en la interfase

$$\begin{aligned} [\varepsilon_1 (E_o + E_1) - \varepsilon_2 E_2] \cdot \hat{n} &= 0 & [(E_o + E_1) - E_2] \times \hat{n} &= 0 \\ [k \times E_o + k_1 \times E_1 - k_2 \times E_2] \cdot \hat{n} &= 0 & \left[\frac{1}{\mu_1} (k \times E_o + k_1 \times E_1) - \frac{1}{\mu_1} k_2 \times E_2 \right] \times \hat{n} &= 0 \end{aligned}$$

Hagamos contabilidad. Tenemos 6 ecuaciones, y justamente tenemos que resolver por E_1 y E_2 . Estas ecuaciones pueden ser resueltas en Mathematica para el caso general.

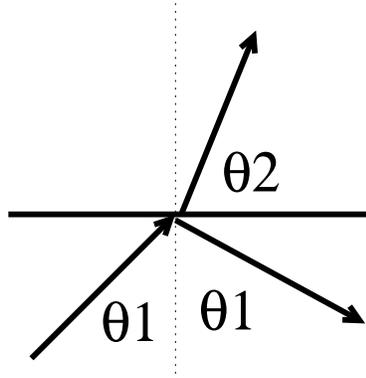


Figura 1: Interfase plana

Para el caso de incidencia normal, podemos escribir los coeficientes de transmisión y reflexión

$$R = \frac{|E_1|^2}{|E_o|^2} = \left[\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right]^2$$

$$T = \frac{|E_2|^2}{|E_o|^2} = \left[\frac{2n_1}{n_2 + n_1} \right]^2$$

Podemos ver que esto implica conservación de energía, ya que usando el vector de Poynting

$$S_o = \frac{c}{8\pi} E^* \times H = n |E_o|^2 \hat{k}_o$$

podemos demostrar que

$$\frac{S_1 + S_2}{S_o} = \frac{|E_1|^2}{|E_o|^2} + \frac{n_2 |E_2|^2}{n_1 |E_o|^2} = R + \frac{n_2}{n_1} T = 1$$

No hay pérdida de energía en el proceso.

Resolver el problema general en Mathematica.

Resolver el problema de la propagación en una interfase delgada.

2. Física de plasmas: medio no trivial

En un plasma las partículas cargadas se mueven en respuesta a los campos aplicados, generando corrientes y densidades de cargas. Las ecuaciones de Maxwell en su forma macroscópica es

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= 4\pi \langle \bar{\rho} \rangle & \nabla \times E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot B &= 0 & \nabla \times B &= \frac{4\pi}{c} \langle \bar{J} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}\end{aligned}$$

La teoría del plasma da una formulación consistente para la dinámica de $\bar{\rho}$ y \bar{J} en la presencia de los campos microscópicos e y b , y en particular para los campos macroscópicos E y B . Recordemos que no siempre existe una escala donde este promedio microscópico tiene sentido, por ejemplo en un plasma diluido donde la dinámica sucede en escalas $L < \lambda$.

La densidad de carga microscópica $\bar{\rho}$ incluye la densidad de carga libre y ligada en los átomos, moléculas. Lo mismo para la corriente \bar{J} . Al pasar a una escala macroscópica vimos en el capítulo anterior que si tenemos cargas ligadas en átomos y moléculas, el efecto del material se puede incluir a través de los campos M y P . Ahora generalizaremos esto, al permitir que las cargas tengan mas movilidad con la posibilidad de generar corrientes libres. Por ahora asumiremos que tenemos un medio **macroscopicamente neutral** $\rho = 0$, lo cual sucede en muchos ambientes astrofísicos de interés. Notemos que esto permite que la ecuación de Maxwell sea

$$\nabla \cdot D = 0$$

lo que en la presencia de una onda plana da

$$k \cdot D = 0$$

Mas adelante relajaremos la restricción de **neutralidad macroscópica** utilizando un formalismo de Vlasov-Maxwell. Notemos que es posible tener corrientes en un medio macroscopicamente neutral, siendo el caso de un conductor un ejemplo de relevancia.

El análisis hecho en el capítulo anterior sugiere que podemos escribir la corriente macroscópica como

$$J = \sigma E + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E \right) + \nabla \times [(1 - 1/\mu)B]$$

donde tenemos los tensores de conductividad σ , dieléctrico ε , y de magnetización μ . Con esta definición, y

$$D = \varepsilon E \quad B = \mu H$$

podemos escribir la **formulación macroscópica** de las ecuaciones de Maxwell en la presencia del plasma como

$$\begin{aligned}\nabla \cdot D &= 0 & \nabla \times E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot H &= 0 & \nabla \times B &= \frac{4\pi}{c} \sigma E + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}\end{aligned}$$

Para este caso general conviene resolver

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial t} &= -c\nabla \times E \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{c}{\epsilon} \left[E \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \sigma E + \nabla \times \frac{B}{\mu} \right]\end{aligned}$$

con E y B dependientes. Si tomamos el rotor de la ecuación de Faraday, tenemos

$$\nabla^2 E - \nabla(\nabla \cdot E) - \frac{4\pi\mu}{c} \frac{\partial(\sigma E)}{\partial t} - \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2(\epsilon E)}{\partial t^2} - \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[B \times \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) \right] = 0$$

la cual aun depende de B. Si μ es independiente del tiempo, podemos tener una ecuación independiente para E, dando

$$\nabla^2 E - \nabla(\nabla \cdot E) - \frac{4\pi\mu}{c} \frac{\partial(\sigma E)}{\partial t} - \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2(\epsilon E)}{\partial t^2} + \mu(\nabla \times E) \times \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) = 0$$

En el caso de oscilaciones harmónicas $Ee^{-i\omega t}$, los tensores ϵ y σ se pueden obtener de la parte real e imaginaria de la corriente

$$J = \left[\sigma + i\omega \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \right] E$$

asumiendo $\mu = 1$.

Notemos: Los tensores se obtienen de J. En muchos libros se calcula el efecto del medio usando el tensor dieléctrico $P = \langle nex \rangle$, dando origen a tensores complejos. Veremos mas adelante que esto complica la formulación de la aproximación Eikonal (óptica de rayo), requiriendo Eikonales complejas. En este libro utilizaremos tensores reales, y en esta formulación veremos que ϵ determina las propiedades de propagación de la onda, y σ la disipación en el medio.

Un tema muy interesante hoy en día son los materiales con $\epsilon < 0$ y $\mu < 0$, llamados “left-handed materials”

Para encontrar estos tensores, y los modos de propagación en el plasma, debemos resolver una evolución macroscópica del plasma. La solución depende fuertemente de la situación particular.

2.1. Propagación en un medio escalar homogéneo

Si asumimos que los tensores son diagonales $\epsilon\delta_{i,j}$, $\mu\delta_{i,j}$ y $\sigma\delta_{i,j}$ y constantes (espacial y temporal), entonces la ecuación de onda

$$\nabla^2 E - \nabla(\nabla \cdot E) - \frac{4\pi\mu}{c} \frac{\partial(\sigma E)}{\partial t} - \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2(\epsilon E)}{\partial t^2} + \mu(\nabla \times E) \times \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) = 0$$

permite soluciones en ondas planas, lo que da origen a la función de dispersión

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\mu\varepsilon + i\mu \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \rightarrow k = \pm \left(\beta + i\frac{\alpha}{2} \right)$$

Los modos de propagación son entonces

$$E(x, t) = E_o \left[e^{-\frac{\alpha}{2} \hat{k} \cdot \vec{x}} e^{i\beta \hat{k} \cdot x - i\omega t} \right]$$

$$B(x, t) = \frac{c}{\omega} \left(\beta + i\frac{\alpha}{2} \right) \hat{k} \times \vec{E}_o \left[e^{-\frac{\alpha}{2} \hat{k} \cdot \vec{x}} e^{i\beta \hat{k} \cdot x - i\omega t} \right]$$

lo cual muestra que los campos no tienen la misma fase dentro de un conductor. La distancia de penetración (“skin depth”) definida como la distancia de penetración en un medio conductor, está dado por

$$\delta = \frac{2}{\alpha} \simeq \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}} \rightarrow E \sim e^{-z/\delta}$$

la última relación se aplica para un buen conductor.

Incidentalmente, notemos que para este caso particular podemos escribir las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} k \cdot E &= 0 & k \times E &= \frac{\omega}{c} B \\ k \cdot B &= 0 & k \times B &= \frac{4\pi\sigma}{c} E - \frac{\omega\mu\varepsilon}{c} E \end{aligned}$$

obteniendo el resultado anterior

$$k = \frac{\omega}{c} n \hat{k} \quad \hat{k} = \frac{\vec{E}_o \times \vec{B}_o}{|\vec{E}_o \times \vec{B}_o|} \quad \vec{B}_o = n \hat{k} \times E_o$$

pero con el índice de refracción complejo

$$n = \left| \frac{kc}{\omega} \right| = \sqrt{\mu\varepsilon + i\mu \frac{4\pi\sigma}{\omega}}$$

esta relación nos permitirá hacer interfaces conductoras.

2.2. Por que $\omega(k)$?

Notemos que la relación de la sección anterior da dos soluciones $k(\omega) = \pm(\beta + i\alpha/2)$. Recordemos que cuando construimos la función de Green en el el espacio $k - \omega$ en el capítulo pasado, vimos que los ceros de la función de dispersión representaba los modos de oscilación del sistema. Por lo tanto es necesario

considerar estos dos modos. Esto es exactamente lo que esperaríamos, ya que nos permitirá construir una solución completa por superposición de un paquete de onda. Veremos esto en detalle mas adelante.

Notemos que la ecuación de onda es en general lineal, por lo tanto la podemos resolver asumiendo una condición inicial y aplicando la transformada de Laplace para el tiempo, y una transformada de Fourier para el espacio. Esto significa que puede ser transformada a

$$h(k, \omega) \cdot E(k, \omega) = \prod (E(t = 0))$$

donde el lado derecho corresponde a condiciones iniciales generadas por la transformada de Laplace. Notemos que si μ depende de la posición, entonces k no representa un buen modo (solo situaciones homogéneas), y por lo tanto la transformada de Fourier debería convertirse en una convolución. Si μ depende de ω solamente, entonces podemos seguir y resolver este problema. Si los tensores dependen de ω , la función de dispersión esta dada por

$$h[k, \omega] \cdot E[k, \omega] = -k \times (k \times E) + \frac{4\pi\mu i\omega}{c} \sigma E + \frac{\omega^2 \mu}{c^2} \varepsilon E + \frac{\mu i\omega}{c} B \times \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right)$$

Notemos que al hacer una transformada de Laplace inversa, solo los modos correspondientes a

$$Det[h(k, \omega)] = 0$$

sobreviven, ya que estos son los polos de nuestra ecuación. Esta es llamada una relación de dispersión. Es una cuestión de opción si hacemos la transformada de Fourier primero y obtenemos $k(\omega)$, o si hacemos la transformada de Laplace primero y obtenemos $\omega(k)$. Hay que tener cuidado con esto, ya que para garantizar que la transformación de Laplace converja hay que hacer una continuación analítica y mover el contorno de integración, a lo que se denomina **método de Vlasov**. En todo caso vemos que los modo de propagación dan origen a $\omega \rightarrow \omega(k)$ que luego se utilizará para construir una solución completa en termino de la transformada de Fourier. Esta expresión conecta k con ω , determinando los modelos posibles del sistema. Los modos de E son encontrados invirtiendo el tensor h .

Trabajaremos en dos ejemplos.

2.2.1. Caso simple I: Conductores

En un conductor podemos tratar el movimiento de las partículas cargadas como

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{e}{m} E(x) e^{-i\omega t} \quad \rightarrow \quad x(t) = \frac{eE(x)e^{-i\omega t}}{m(\omega_o^2 + \omega^2 - i\omega\gamma)}$$

Notemos que en esta ultima expresión asumimos que $kx \ll 1$, por lo tanto estamos asumiendo un campo pequeño. Si las partículas no interactúan entre ellas (densidad muy baja), podemos calcular la corriente

$$J = -ne\dot{x} = \frac{-i\omega ne^2}{m(\omega_o^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} E$$

lo que nos permite estimar

$$\sigma = \frac{\omega_{pe}^2 \gamma}{4\pi \left[\gamma^2 + \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \right)^2 \right]} \quad \varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \right)}{\left[\gamma^2 + \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \right)^2 \right]}$$

con la frecuencia del plasma $\omega_{pe}^2 = 4\pi n Z e^2 / m$. En muchos libros se maneja el concepto de un dieléctrico complejo, y aunque las dos formulaciones son completamente análogas, la óptica se complica considerablemente. Para electrones libres (como en el caso de los metales y los plasmas) $\omega_o = 0$ y pequeñas velocidades $\gamma \approx 0$, por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\omega_{pe}^2 \gamma}{4\pi [\gamma^2 + \omega^2]} & \rightarrow & \quad \sigma = 0 \\ \varepsilon &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{[\gamma^2 + \omega^2]} & \rightarrow & \quad \varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

Este modelo sirve para representar ondas en la ionosfera mientras $\omega > \omega_{pe}$. Si a alguna altura $\omega < \omega_{pe}$, entonces $\varepsilon \rightarrow \sigma$, entonces y la onda es reflejada. Este fenómeno es el responsable de la reflectividad de los metales. Si tenemos una onda plana en el plasma, la distancia de penetración sera E

$$\delta = i \frac{2}{\omega} \sqrt{\omega^2 + \omega_{pe}^2}$$

por lo tanto, una onda que se propaga en la ionosfera es reflejado si $\omega < \omega_{pe}$ permitiendo las comunicaciones de radio tipo AM. Por esto podemos escuchar la radio de Moscow en Santiago. En este caso el índice de refracción es real y la propagación real del rayo puede ser resuelta con la formulación Eikonal que veremos mas abajo usando

$$n(x) = \sqrt{\varepsilon(x)} = \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2(x)}{\omega^2}}$$

En situaciones mas generales debemos incluir el efecto de frecuencias resonantes múltiples ω_o dando lugar a altos coeficientes de absorción.

2.2.2. Caso simple II: Propagación ionósferica

En la presencia de un campo magnético constante $\mathbf{B} = B_o \hat{z}$, como es en el caso del campo magnético de la tierra, podemos escribir la siguiente ecuación de movimiento

$$m\ddot{r} - \frac{e}{c} B_o \times \dot{r} = e E e^{-i(k \cdot x - \omega t)}$$

Asumiendo $k|r| \ll 1$, podemos escribir

$$r = r_o e^{-i(k \cdot x - \omega t)}$$

por lo que obtenemos

$$4\pi i J = \begin{bmatrix} \frac{\omega\omega_{pe}^2}{\Omega^2 - \omega^2} & \frac{i\Omega\omega_{pe}^2}{\Omega^2 - \omega^2} & 0 \\ -\frac{i\Omega\omega_{pe}^2}{\Omega^2 - \omega^2} & \frac{\omega\omega_{pe}^2}{\Omega^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

Para encontrar los modos de propagacion, tenemos que encontrar la relacion de dispersion, dada por la ecuacion de onda

$$k \times k \times E + k_o \left[\frac{4i\pi}{c} J + k_o E \right] = 0.$$

Asumiendo modos que se propagan en forma paralela al campo magnetico, obtenemos

$$\begin{bmatrix} k^2 - k_o^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \Omega^2} k_o^2 & \frac{i\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \Omega^2} k_o \frac{\Omega}{c} & 0 \\ -\frac{ik_o\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \Omega^2} k_o \frac{\Omega}{c} & k^2 - k_o^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \Omega^2} k_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_o^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0$$

donde $\Omega = qB/mc$ es la girofrecuencia. Esto es

$$\begin{bmatrix} A & iB & 0 \\ -iB & A & 0 \\ 0 & 0 & k_o^2 - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0$$

Por lo tanto la relacion de dispersion $A^2 = B^2$ tiene dos modos circulares que se propagan a lo largo de campo magnetico (donde k_{\pm} sale de $A = \pm B$)

$$E_{\pm} = E_{\pm}(\hat{x} \pm \hat{y})e^{ik_{\pm}z}$$

Es extremadamente interesante notar que si podemos poner un campo magnetico lo suficientemente fuerte en un conductor (electrones libres) podemos hacerlo transparente con la propagacion de la onda a través de él, i.e., un material invisible.

2.3. Trayectoria de particulas en campos electromagneticos

2.4. Ecuacion de Vlasov

En Mecanica Analitica demostramos que la distribucion de N particulas $\rho(\bar{x}, t)$ en el espacio de fase satisface

$$\frac{d}{dt}\rho(\bar{x}, t) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\dot{\bar{x}} \cdot \nabla_{\bar{x}})\rho = 0$$

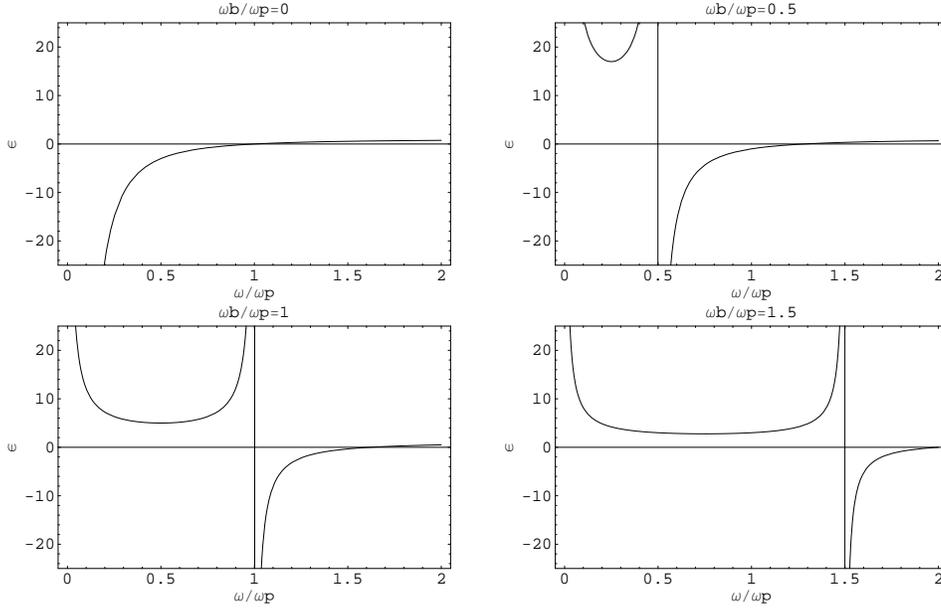


Figura 2: Constante dieléctrica como función de ω , ω_p , ω_B para la propagación ionosférica.

para las $6N$ variables $\bar{x} = x_1, \dots, x_{3N}, p_1, \dots, p_{3N}$. Si asumimos que las fluctuaciones son pequeñas, y que las partículas interactúan solo a través de los campos promedios (y entre especies a través de una fricción efectiva), podemos asumir que

$$\rho = \prod_i^N f(x_j, t)$$

Aquí x_j corresponde a la posición y momento de la particular j . Esta implica que las correlaciones son pequeñas. En principio las correlaciones de segundo orden son incluidas en el término colisional que veremos abajo en la ecuación de Vlasov. Por lo tanto la ecuación para la densidad de partículas f es

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial f(x_j, t)}{\partial t} \prod_{i \neq j} f(x_i, t) + \sum_j \bar{x}_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \prod_i f(x_i, t) &= 0 \\ \sum_j \frac{\partial f(x_j, t)}{\partial t} \prod_{i \neq j} f(x_i, t) + \sum_j (x \cdot \nabla) f(x_j, t) \prod_{i \neq j} f(x_i, t) &= 0 \\ \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial f(x_j, t)}{\partial t} + (x \cdot \nabla) f(x_j, t) \right) \prod_{i \neq j} f(x_i, t) &= 0 \end{aligned}$$

Como cada término en el paréntesis depende solo de la particular j , entonces todos deben de ser cero, y por lo tanto obtenemos la ecuación de Vlasov.

La dinámica de partículas que interactúan a través de campos electromagnéticos macroscópicos pueden ser descrita por una ecuación macroscópica llamada la ecuación de Vlasov que asume que:

1. la densidad del plasma es pequeña

2. las correlaciones son pequeñas
3. las fluctuaciones electromagnéticas microscópicas son irrelevantes

La ecuación de Vlasov es entonces

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(E + \frac{v}{c} \times B \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_{coll}$$

donde $f(x, v, t)$ representa la densidad de partículas con posición en el cubo centrado en x de tamaño dx^3 y con velocidades en el cubo centrado en v y tamaño dv^3 . El operador colisional

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_{coll}$$

representa posibles colisiones entre partículas, o con partículas neutrales como es el caso de la ionosfera.

Las variables macroscópicas son

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \int dv^3 f_\alpha \\ U_\alpha &= \frac{1}{n_\alpha} \int dv^3 f_\alpha v = \langle v \rangle_\alpha \\ P_{\alpha,i,j} &= m_\alpha \int dv^3 f_\alpha (v_i - U_{\alpha,i})(v_j - U_{\alpha,j}) = n_\alpha m_\alpha \langle (v_i - U_i)(v_j - U_j) \rangle_\alpha \end{aligned}$$

Notemos que el tensor de presión esta definido con respecto a la velocidad promedio de cada especie. Con estas definiciones podemos escribir

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha(x, v, t) dv^3 \\ J &= \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha U_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha \int v f_\alpha(x, v, t) dv^3 \end{aligned}$$

como fuentes para las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot E &= 4\pi\rho & \nabla \times E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \cdot B &= 0 & \nabla \times B &= \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden resolver usando una transformada de Laplace-Fourier para condiciones iniciales tanto en los campos como en las distribuciones a través de la **teoría de Vlasov**, lo que implica que tendremos también una función de Dispersión, y varios modos de propagación.

Por ahora construiremos una **teoría de fluidos** para estas ecuaciones, tomando momentos $\langle v^\nu \rangle$ de la ecuación de Vlasov.

2.4.1. Momento v^0

Asumamos que no tenemos ni ionización ni recombinación, y además el plasma esta completamente ionizado

$$\left[\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} \right]_c = 0$$

Por lo tanto multiplicando por 1 e integrando, obtenemos la ecuación de continuidad (usando una sumatoria de Einstein)

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (n_\alpha U_{\alpha,i}) = 0$$

Hemos asumido que para grandes $|v| \rightarrow \infty$ la distribución tiende a cero.

2.4.2. Momento v

Vemos que en la ecuación de Vlasov multiplicando por $m_\alpha v_i$ e integrando obtenemos (usando una sumatoria de Einstein)

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha m_\alpha U_{\alpha,i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (n_\alpha m_\alpha \langle v_j v_i \rangle) = n_\alpha q_\alpha E_i + \frac{n_\alpha q_\alpha}{c} (U_\alpha \times B)_i + K_{\alpha,i}$$

Notemos que

$$\langle (v_i - U_{\alpha,i})(v_j - U_{\alpha,j}) \rangle = \langle v_i v_j \rangle - U_{\alpha,i} U_{\alpha,j}$$

y por lo tanto

$$n_\alpha m_\alpha \left[\frac{\partial U_{\alpha,i}}{\partial t} + U_{\alpha,j} \frac{\partial U_{\alpha,i}}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial P_{\alpha,i,j}}{\partial x_j} + n_\alpha q_\alpha E_i + \frac{n_\alpha q_\alpha}{c} (U_\alpha \times B)_i + K_{\alpha,i}$$

Además,

$$K_{\alpha,i} = \int m_\alpha v_i \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right]_c dv^3$$

representa el intercambio de momentum con las otras partículas. En un aproximación lineal, esto se puede escribir como

$$K_{\alpha,i} = -m_\alpha \sum_{\beta} \nu_{\alpha,\beta} (n_\alpha U_\alpha - n_\beta U_\beta)$$

donde $\nu_{\alpha,\beta}$ es la frecuencia de colisiones entre especies α y β . Esto es equivalente a

$$\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right]_c = - \sum_{\beta} \nu_{\alpha,\beta} (f_\alpha - f_\beta)$$

2.4.3. Momento v^2

Multiplicando por $m_\alpha v^2/2$ e integrando obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle v_j v^2 \rangle_\alpha \right) - n_\alpha q_\alpha E \cdot U_\alpha = H_\alpha$$

Notemos que en general podríamos tratar de construir una ecuación para el tensor $P_{\alpha,i,j}$ pero por ahora asumiremos que es isotropico

$$P_{\alpha,i,j} = P_\alpha \delta_{i,j}$$

Además,

$$H_{\alpha,i} = \int m_\alpha v^2 \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right]_c dv^3$$

representa el intercambio de energía cinética con las otras partículas. En un aproximación lineal, esto se puede escribir como

$$K_{\alpha,i} = -m_\alpha \sum_\beta \nu_{\alpha,\beta} (n_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha - n_\beta \langle v^2 \rangle_\beta)$$

donde $\nu_{\alpha,\beta}$ es la frecuencia de colisiones entre especies α y β . En principio esto se puede relacionar con las presiones respectivas.

2.5. Ecuaciones de Fluido

Es conveniente definir las variables de fluido macroscópicas

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha & \mu U &= \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha U_\alpha \\ \rho &= \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha & J &= \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha U_\alpha \end{aligned}$$

Con estas definiciones inmediatamente tenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$$

and

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu U) = 0$$

Notemos que las colisiones entre las partículas cargadas no cambian en momento total

$$\sum_\alpha m_\alpha \int dv^3 \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right]_c v = \sum_\alpha K_\alpha = 0$$

por lo tanto

$$\mu \left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U \right] = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[P - \mu U_i U_j + \sum_{\alpha} m_{\alpha} n_{\alpha} U_{\alpha,i} U_{\alpha,j} \right] + \rho E + \frac{1}{c} (J \times B)$$

Vemos que se hace conveniente reformular las presiones del fluido \bar{P} con respecto a la velocidad del centro de masa, y no de cada especie. Esto es

$$\bar{P}_{\alpha,i,j} = m_{\alpha} \int dv^3 f_{\alpha} (v_i - U_i) (v_j - U_j) = n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v_i v_j \rangle_{\alpha} - n_{\alpha} m_{\alpha} U_i U_j$$

Con esta definición tenemos

$$\mu \left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U \right] = -\nabla \cdot \bar{P} + \rho E + \frac{1}{c} (J \times B)$$

con $\bar{P} = \sum_{\alpha} \bar{P}_{\alpha}$. Si asumimos una presión isotropica, tenemos

$$\bar{P}_{\alpha} = \frac{1}{3} n_{\alpha} m_{\alpha} (\langle v^2 \rangle_{\alpha} - U^2) \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \bar{P} = \nabla \bar{P}$$

y .

Notemos que las colisiones entre las partículas cargadas no cambian la energía total

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \int dv^3 \left[\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right]_c v^2 = \sum_{\alpha} H_{\alpha} = 0$$

El flujo de energía es

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,i} &= \frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle (v_i - U_i)(v - U)^2 \rangle_{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} (\langle v_i v^2 \rangle_{\alpha} - 2 \langle v_i v_j \rangle_{\alpha} U_j + U^2 U_{i,\alpha} - U_i \langle v^2 \rangle_{\alpha} + 2 U_i U_j U_{\alpha,j} - U_i U^2) \\ &= \frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v_i v^2 \rangle_{\alpha} - U_j [P_{\alpha,i,j} + n_{\alpha} m_{\alpha} U_i (U_j - U_{\alpha,j})] + \frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} U^2 (U_{i,\alpha} - U_i) - \frac{1}{2} U_i n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v^2 \rangle_{\alpha} \end{aligned}$$

Sumando sobre α y tomando un presión isotropica tenemos

$$Q = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v_i v^2 \rangle_{\alpha} - \frac{5}{2} P U_i - \frac{1}{2} \mu U^2 U_i$$

Notemos que la ecuación de un momento n , depende del momento $n + 1$. Esto se llama una **jerarquías** de ecuaciones. En general esta jerarquía se corta en algún nivel. Aquí asumiremos que

$$Q \approx 0$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{2} n_{\alpha} m_{\alpha} \langle v_j v^2 \rangle_{\alpha} \right) \approx \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j [5\bar{P} + \mu U^2])$$

Por lo tanto si sumamos la ecuación de la energía cinética sobre las partículas tenemos

$$\frac{3}{2} \left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \bar{P} \right] = -\frac{5}{2} \bar{P} \nabla \cdot U + (J - \rho U) \cdot \left(E + \frac{1}{c} U \times B \right)$$

2.6. La ley de Ohm

En plasma la gente suele utilizar la ecuación de movimiento para los electrones (o las partículas de menor masa)

$$n_\alpha m_\alpha \left[\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} + (U_\alpha \cdot \nabla) U_\alpha \right] = -\frac{\partial P_{\alpha,i,j}}{\partial x_j} + n_\alpha q_\alpha \left[E + \frac{U_\alpha}{c} \times B \right] + K_{\alpha,i}$$

como una ecuación de Ohm. A veces es útil construir la ecuación de Ohm a través de la derivada temporal de

$$J = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha U_\alpha$$

que nos da

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \langle v_j v_i \rangle_\alpha \right) + \sum_\alpha n_\alpha \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} \left[E + \frac{U_\alpha}{c} \times B \right] + \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} K_{\alpha,i}$$

Notemos que par el caso de un plasma de dos partículas (electrones y neutrones) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{e^2 n_e u_e}{cm_e} \times B + \frac{e^2 n_i u_i}{cm_i} \times B &= \left(\frac{e^2 n_e}{cm_e} + \frac{e^2 n_i}{cm_i} \right) \frac{\mu U \times B}{m_e + m_i} + \left(\frac{e^2 m_e}{cm_i} - \frac{e^2 m_i}{cm_e} \right) \frac{J \times B}{m_e + m_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha \langle v_i v_j \rangle_\alpha &= \nabla \cdot \sum_\alpha \frac{q_\alpha P_\alpha}{m_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i J_j + U_j J_i - U_i U_j \rho) \end{aligned}$$

2.7. Algunos parámetros relevantes

Estos son los valores de algunos parámetros característicos en la cola de la magnetosfera (magnetotail)

Spatial scales		
Electron Larmor gyroradius	$r_{Le} = v_{Te}/\Omega_e$	10 kms
Ion Larmor gyroradius	$r_{Li} = v_{Ti}/\Omega_i$	1000 kms
Plasma skin depth	$\lambda_e = c/\omega_{pe}$	1 km
Plasma Debye Length	$\lambda_D = (kT/4\pi n e^2)^{-1/2}$	200 m

2.8. Ecuaciones de MHD

Ahora vamos a construir las ecuaciones de Magnetohydrodynamics (MHD).

Time scales		
Electron gyrofrecuency	$\Omega_e = eB/m_e c$	2×10^3 rad/sec
Ion gyrofrecuency	$\Omega_i = ZeB/m_i c$	1 rad/sec
Electron plasma frequency	$\omega_{pe} = (4\pi n_e e^2/m_e)^{1/2}$	10^5 rad/sec
Ion plasma frequency	$\omega_{pi} = (4\pi n_i q_i^2/m_i)^{1/2}$	2×10^3 rad/sec
Electron collisions	$\nu_e = 2,91 \times 10^{-6} n_e \ln \Lambda T_e^{-3/2}$	3×10^{-9} 1/sec
Ion collisions	$\nu_i = \frac{4,80}{10^{-8} Z^4 \mu^{-1/2} n_i \ln \Lambda T_i^{-3/2}} \times$	5×10^{-12} 1/sec

Velocities		
Electron thermal speed	$v_{Te} = (kT_e/m_e)^{1/2}$	10^4 km/sec
Ion Thermal speed	$v_{Ti} = (kT_i/m_i)^{1/2}$	10^3 km/sec
Ion sound speed	$C_s = (\gamma Z k T_e/m_i)^{1/2}$	3×10^2 km/sec
Alfven speed	$v_A = B/(4\pi n_i m_i)^{1/2}$	10^2 km/sec

2.8.1. Neutralidad

En general asumamos un plasma macroscopicamente neutral

$$\rho = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} = 0$$

compuesto de varios tipos de partículas cargadas. Esta es una aproximación bastante común en plasmas. Cuando tenemos electrones e iones (una vez ionizados), en general esto implica $n_e = n_+$.

Para clarificar esta aproximación, definamos la distancia de Debye λ_D de las partículas. Si ponemos una carga en reposo en el plasma con densidad inicial $n_{0,\alpha}$, esto forzará a las partículas del plasma a moverse para cancelar el campo eléctrico producido por esta carga. Eventualmente se debería llegar a una situación de equilibrio $\Phi(r)$. Dado que las partículas cargadas tienen en general una distribución tipo Boltzmann (asumiendo que estamos muy cerca del equilibrio estadístico inicial), vemos que

$$n_{\alpha} = n_{0,\alpha} \text{Exp} \left[-\frac{q_{\alpha} \Phi}{kT_{\alpha}} \right]$$

dado que tienen una temperatura dada en el plasma. Dado que estamos cerca del equilibrio estadístico, implica que el exponencial es pequeño, y por lo tanto

$$n_{\alpha} = n_{0,\alpha} \text{Exp} \left[-\frac{q_{\alpha} \Phi}{kT_{\alpha}} \right] \approx n_{0,\alpha} \left[1 - \frac{q_{\alpha} \Phi}{kT_{\alpha}} \right]$$

El resultado final debería ser la solución

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \left[q\delta(x) - \sum_{\alpha} q_{\alpha} (n_{\alpha} - n_{0,\alpha}) \right] \approx -4\pi q\delta(x) + \frac{1}{\lambda_D^2} \Phi$$

Esto genera un potencial apantallado

$$\Phi \sim \frac{q}{r} e^{-r/\lambda_D}$$

donde

$$\lambda_D^{-2} = \sum_{\alpha} \lambda_{D,\alpha}^{-2} \quad \lambda_{\alpha,D}^2 = \frac{kT_{\alpha}}{4\pi q_{\alpha}^2 n_{\alpha}}$$

Asumamos que estamos interesados en fenómenos que ocurren en escalas mucho mayores a $L \gg \lambda_D$, entonces podemos asumir que

$$\rho \sim 0$$

En el caso de dos especies tenemos $n_1 = n_2$. Esto implica que

$$\nabla \cdot J = 0$$

Además, esto permite definir un plasma, que es cuando tenemos efectos colectivos, lo que implica que debería haber suficientes partículas dentro de una distancia de Debye,

$$g = \frac{1}{n\lambda_D^3} \ll 1$$

2.8.2. Electro protón plasma

Nuevamente nos concentraremos en el caso de electrones y protones

$$m_p \gg m_e$$

Primero tenemos

$$n_e \approx n_i \approx \frac{\mu}{m_p}$$

Además

$$U_p \approx U \quad U_e \approx U - \frac{1}{en} J$$

Asumamos que $|U_p - U_e|$ es pequeño, por lo tanto

$$-\frac{e}{m_e} K_e + \frac{e}{m_p} K_p \approx 2nev_{e,p}(U_e - U_p) \approx -2\nu J = -\frac{ne^2}{m_e} \eta J$$

donde la resistividad del plasma es

$$\eta = \frac{m_e \nu}{ne^2}$$

La ecuación de Ohm es entonces

$$\left[E + \frac{U}{c} \times B - \eta J \right] \approx \frac{4\pi}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{J \times B}{cen_e} + \frac{1}{en} \nabla \cdot \left(\frac{m_e}{m_i} P_i - P_e \right)$$

sin considerar los términos cuadráticos y tomando explícitamente que $m_p \gg m_e$. Por eso es que la gente utiliza mucho la ecuación de los electrones como la relación de Ohm. Las dos concuerdan solo en estos límites.

Vemos que en general tenemos el termino

$$\eta J = E + \frac{U}{c} \times B$$

al que estábamos acostumbrados. Por lo tanto si asumimos que en general η es muy pequeño, podemos partir con el “ordering”

$$E \sim UB/c$$

En la ecuación de fuerza tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \rho E \sim 4\pi k E E \sim \frac{kU^2 B^2}{c^2} \\ \left| \frac{J \times B}{c} \right| \sim \frac{kBB}{c} \end{array} \right\} R = \frac{\rho E}{\left| \frac{J \times B}{c} \right|} = \left(\frac{U}{c} \right)^2 \ll 1$$

por lo tanto podemos asumir que $\rho \approx 0$ para velocidades no-relativísticas. Pero si asumimos que $\rho \approx 0$, entonces lo lógico es que utilicemos la ecuación

$$\nabla \times B = \frac{4\pi}{c} J$$

Para velocidades no-relativistas, tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \left| \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right| \sim UB/(c^2 T) \\ |\nabla \times B| \sim B/L \end{array} \right\} R = \frac{\left| \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \right|}{|\nabla \times B|} = \left(\frac{U}{c} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{L}{T} \right) \ll 1$$

Notemos que el tensor de presión es en general no-isotropico por que el medio es bastante no-colisional, lo que implica que no hay suficientes colisiones para volver al equilibrio iso-tropico. Pero podemos ignorar efectos de presión, si estamos mirando en escalas mas grandes que la distancia de Larmor de los electrones:

$$\left. \begin{array}{l} \left| \frac{J \times B}{cen_e} \right| \sim \frac{P_e}{enL} \sim \frac{nm_e v_{th}^2}{enL} \\ \left| \frac{U}{c} \times B \right| \sim UB/c \end{array} \right\} R = \frac{\left| \frac{1}{en} \nabla \cdot P \right|}{\left| \frac{U}{c} \times B \right|} \sim \frac{v_{th}}{U} \left(\frac{r_{L,e}}{L} \right) \ll 1$$

La dependencia temporal de la corriente también se puede ignorar si la giro frecuencia de los electrones es mayor a la frecuencia de la escala temporal de la dinámica de los campos

$$\left. \begin{array}{l} \left| \frac{J \times B}{cen_e} \right| \sim \frac{BB}{cenL} \\ \left| \frac{4\pi \partial J}{\omega_{pe}^2 \partial t} \right| \sim \frac{m_e \omega c B}{ne^2} \end{array} \right\} R = \frac{\left| \frac{4\pi \partial J}{\omega_{pe}^2 \partial t} \right|}{\left| \frac{J \times B}{cen_e} \right|} \sim \frac{\omega}{\Omega_e} \ll 1$$

El termino de Hall también se puede ignorar si la distancia de Larmor de los electrones, y el “electro skin depth” $\lambda_e = \frac{c}{\omega_{pe}}$ es mucho menor que el radio de Larmor de los electrones.

$$\left. \begin{array}{l} \left| \frac{J \times B}{cen_e} \right| \sim \frac{BB}{enL} \\ \left| \frac{U \times B}{c} \right| \sim \frac{UB}{c} \end{array} \right\} R = \frac{\left| \frac{J \times B}{cen_e} \right|}{\left| \frac{U \times B}{c} \right|} \sim \left(\frac{v_{th}}{U} \right) \left(\frac{\lambda_e}{r_{L,e}} \right)^2 \left(\frac{r_{L,e}}{L} \right) \ll 1$$

Muchas veces esto no se satisface.

Bajo estas aproximaciones la ley de Ohm es

$$E = -\frac{1}{c} U \times B$$

la que satisface la condición de “Frozen-in”. Las ecuaciones de MHD son entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu U) &= 0 \\ \mu \left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla) U \right] &= -\nabla \cdot \bar{P} + \frac{1}{c} (J \times B) \\ \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} &= \nabla \times (U \times B) \end{aligned}$$

con

$$J = \frac{c}{4\pi} \nabla \times B$$

A veces es mejor integrar estas ecuaciones para el vector potencial, ya que $\rho = 0$, y lo cual garantiza $\nabla \cdot B = 0$. Notemos que aun nos falta una ecuación para \bar{P} . De la ecuación para \bar{P} de arriba tenemos

$$\frac{3}{2} \left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \bar{P} \right] = -\frac{5}{2} \bar{P} \nabla \cdot U$$

lo que podemos re-escribir como

$$\frac{1}{\bar{P}} \frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{5}{3} \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt}$$

donde

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \bar{P} \right]$$

con lo cual tenemos

$$\bar{P} \propto \mu^{5/3}$$

2.8.3. Perturbación lineal en plasma homogéneo

Ahora partiendo de un equilibrio homogéneo

$$B_o \quad U_o \quad \mu_o \quad \bar{P}_o$$

podemos hacer perturbaciones lineales

$$B_o + B_1 e^{ik \cdot x - \omega t} \quad U_o + U_1 e^{ik \cdot x - \omega t} \quad \mu_o + \mu_1 e^{ik \cdot x - \omega t} \quad \bar{P}_o + \bar{P}_1 e^{ik \cdot x - \omega t}$$

para obtener el tipo de ondas que se pueden propagar en el sistema. Esto va a dar origen a una matriz que determina los 8 modos de propagación

$$A(\omega, k)x = 0 \quad \omega_i(k)$$

donde $x = \{B_1, U_1, \bar{P}_1, \mu_1\}$. De esta relación podemos encontrar los tensores ϵ y σ si necesitáramos.

También podemos considerar esto como un problema de valor inicial si deseamos, como lo hicimos con la ecuación de Vlasov.

para la situación que no tenemos un plasma homogéneo hay que ser más cuidadoso, y hay que considerar las variaciones espaciales de los campos, y por lo tanto no podemos hacer la expansión en ondas planas.

2.9. Shumman Resonances

3. Óptica del rayo, con $n(x)$

Hasta ahora conocemos cómo resolver la ecuación de ondas con $n = \text{constante}$ por una solución de rayo con

$$S(x) = n \hat{k} \cdot \vec{x} \quad \rightarrow \quad E(x, t) = \vec{E}_o e^{ik_o S(x) - i\omega t}$$

donde $k_o = \omega/c$. La función S es la Eikonal, y es claro que k es perpendicular al plano constante de la fase, i.e., $S = \text{constante}$. El camino seguido por k es denominado un rayo. En el caso de $\epsilon(x)$ y $\sigma(x)$, debemos reescribir las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla^2 E - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{E \cdot \nabla \epsilon}{\epsilon} \right)$$

Podemos tratar una solución armónica en el tiempo

$$E(x, t) = \vec{E}_o(x) e^{ik_o S(x) - i\omega t}$$

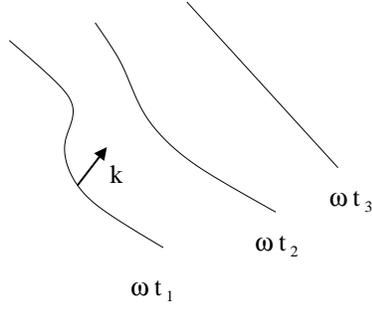


Figura 3: Como evoluciona $S(x)$.

como se sugiere en la Fig. 3.

Si tratamos esta función como una solución que tenemos de las ecuaciones de Maxwell, con $\mu = \text{constante}$,

$$\begin{aligned}
 0 &= \nabla^2 \vec{E}_o - \nabla[\vec{E}_o \cdot \nabla(\ln \varepsilon)] \\
 &\quad - ik_o \left[-\frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E}_o + 2(\nabla S \cdot \nabla) \vec{E}_o - \vec{E}_o \nabla^2 S + \nabla S (\vec{E}_o \cdot \nabla(\ln \varepsilon)) \right] \\
 &\quad + k_o^2 [(\nabla S)^2 - \varepsilon] \vec{E}_o
 \end{aligned}$$

Si asumimos que $k_o L \gg 1$, (L como la longitud de escala de la variación del campo y el índice de refracción), lo cual significa que el campo varía suavemente comparado con la longitud de onda de la onda, $L \gg \lambda$. Podemos escribir la siguiente solución para un orden dado

$$\begin{aligned}
 (\nabla S)^2 &= n^2 = \varepsilon \\
 2(\nabla S \cdot \nabla) \vec{E}_o - \vec{E}_o \nabla^2 S + \nabla S (\vec{E}_o \cdot \nabla(\ln \varepsilon)) &= \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E}_o
 \end{aligned}$$

Notemos que la propagación de S responde a las variaciones de ε , mientras que la conductividad sólo afecta a la evolución de la amplitud de la onda.

Podemos obtener el mismo resultado por analogía. Usando la metodología para $n = \text{constante}$ definimos el vector unitario \hat{k} que determina la propagación del rayo que es perpendicular a S en cada punto

$$\begin{aligned}
 \nabla S &= n(x) \hat{k}(x) \\
 \hat{k} &= \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{\nabla S}{n}
 \end{aligned}$$

con s la longitud de arco del camino $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Recuerde que el gradiente de S tiene la magnitud apropiada. La ecuación del rayo definido por \hat{k} , es

$$\frac{d}{ds} n \frac{dr}{ds} = \frac{d\nabla S}{ds} = \nabla n$$

Usando $\nabla(A \cdot B) = (A \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)A + A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A)$

tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_i n^2 &= \nabla_i (\nabla S \cdot \nabla S) \quad \rightarrow \quad n \nabla_i n = [\nabla S]_j \frac{\partial [\nabla S]_i}{\partial x_j} \\ \frac{d[\nabla S]_i}{ds} &= \frac{dx_j}{ds} \frac{\partial [\nabla S]_i}{\partial x_j} = \frac{[\nabla S]_j}{n} \frac{\partial [\nabla S]_i}{\partial x_j} = \frac{1}{n} n \nabla n = \nabla n\end{aligned}$$

Lo cual da la ecuación del rayo. Podemos escribir todavía

$$S(x) = \int_{\lambda_o}^{\lambda_f} n[x(\lambda)] d\lambda$$

donde los términos de segundo orden en x han sido omitidos como es esperado para una aproximación de rayo. Por lo tanto si partimos de x_0 y la ecuación del rayo nos lleva a x , entonces podemos calcular cuando cambio S en ese camino. De esta forma podemos encontrar $S(x)$ en todo el espacio (en la practica es mas conveniente integrar hacia atrás).

Otra cosa es descubrir cuanta energía es perdida en la propagación, i.e., el valor de $E(x)$ a través de la trayectoria. Es fácil mostrar que el campo varia a través de la trayectoria como

$$E_o(s) = E'_o(s) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^s \frac{\nabla^2 S(s') + \frac{4\pi\sigma(s')}{c}}{n(s')} ds' \right] \quad (1)$$

con $E'(s) =$ constante a lo largo del rayo si es perpendicular al rayo en algún punto, e.g., en el espacio vacío. Notemos que

$$\nabla^2 S = \nabla \cdot (\nabla S) = \nabla \cdot \left(n \frac{dr}{ds} \right)$$

por lo tanto tenemos que evaluarla en forma numérica. En algunas situaciones se puede hacer en forma analítica.

Podríamos intentar escribir una ecuación de rayo para un Eikonal complejo y habría dado una solución similar en términos de las dos ecuaciones Eikonales. En nuestro formalismo no es necesario, ya que tenemos claramente separados los efectos de propagación del tensor dieléctrico ε , de los efectos de la disipación se incorporaron en el tensor de la conductividad σ , ambos reales.

Es bastante fácil notar que si $n =$ constante, entonces (2) da líneas rectas. En los interfaces entre los dos medios, usamos la ley de Snell. El primer término en la integral de (2) representa la divergencia de los rayos en el espacio. Tomando una onda esférica en el espacio vacío, luego

$$\exp(i[k_0 r - \omega t]) \rightarrow \nabla^2 S = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r S}{\partial r^2} = \frac{2}{r}$$

$$\frac{1}{2} \int \nabla^2 S ds = \ln r \rightarrow E(s) = \frac{E(0)}{r}$$

como debería ser.

Los métodos de soluciones para esta ecuación incluyen:

1. La aproximación paraxial.
2. Numéricamente.
3. El principio de Fermat.
4. La suma de fases.

Es extremadamente importante notar que hemos obtenido la misma relación para la Eikonal independiente de la ecuación de ondas que representa, expansión analítica de apenas una onda con una fase variable. Por lo tanto la ecuación del rayo, i.e. el Eikonal, sólo representa cómo las fases de la solución de la ecuación de ondas cambia en un índice de refracción variable. Sólo la amplitud de la onda depende en específico de la ecuación de ondas (términos fuente). Por lo tanto, esta aproximación Eikonal es válida para cualquier solución oscilatoria a través de un espacio índice de refracción variable, mientras las variaciones del espacio sean más suaves que la longitud de onda.

Problema: La capa de invisibilidad. Considere una esfera (o cilindro) de radio R con un índice de refracción $n(x, y, z)$ tal que existe una region cerca del origen por la cual los rayos externos no logran pasar. Si además estos rayos salen de la esfera en la misma dirección de incidencia, entonces a esta region se le denomina la region de invisibilidad. Trate de construir el índice de difracción. Como se plantea este problema para poder resolverlo? **Ayuda:** Se puede plantear como un problema de optimización o directamente como ecuaciones diferenciales. **Ayuda:** Se sugiere plantearlo expandiendo n en términos de M elementos finitos y luego testear que se de la condición de incidencia igual a la condición de salida para un número igual de rayos. Utilizando la ecuación de onda, muestre que la solución que construyo en el problema anterior para n genera efectivamente una region de invisibilidad.

3.1. Aproximación paraxial

En la aproximación paraxial sustituimos

$$\frac{d}{ds} \simeq \frac{d}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx} n \frac{dz(x)}{dx} = \frac{\partial n}{\partial z}$$

En esta aproximación es útil desarrollar un formalismo de matrices para trabajar problemas complejos de ir a través de diversos medios e interfaces. De hecho este trazo del rayo es usado en simulaciones complejas

de la realidad.

En este formalismo, definimos un estado de dos vectores del rayo $(z(x), x)$. Usando este formalismo podemos definir la transformación del rayo en:

a) En un medio con $n = \text{constante}$ de largo L

$$\begin{bmatrix} z(L) \\ z'(L) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{bmatrix}$$

b) Una interfaz dieléctrica

$$\begin{bmatrix} z_+ \\ z'_+ \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1/n_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_- \\ z'_- \end{bmatrix}$$

c) Lentes delgadas

$$\begin{bmatrix} z_+ \\ z'_+ \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_- \\ z'_- \end{bmatrix}$$

d) Espacio variable con $n(x, z) = n_o(1 - \alpha^2 z^2/2)$ de longitud L

$$\begin{bmatrix} z(L) \\ z'(L) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha L) & \alpha^{-1} \sin(\alpha L) \\ -\alpha^{-1} \sin(\alpha L) & \cos(\alpha L) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{bmatrix}$$

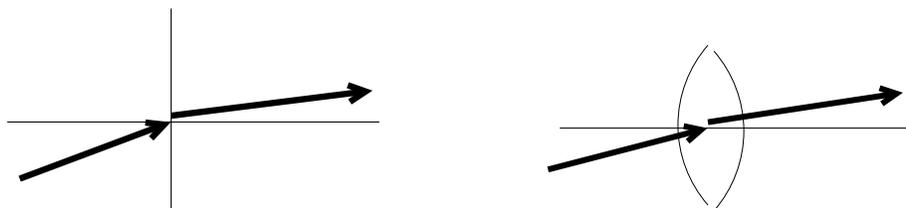


Figura 4: Aproximaciones paraxiales

con estas aproximaciones podemos calcular muchas trayectorias de rayo complejas en un medio complejo. Más aún, es posible establecer una conexión directa de la forma matricial y el coeficiente de propagación de una viga Gaussiana, usada en fibras ópticas. Esto es lo que se usa en “ray optics” para las películas de animación. con muchas rayos de luz.

Problema de reflexión en un espejo.

Problema de propagación magneto esférica: Onda alven.

3.2. Solución numérica

La ecuación de rayo, sus tres componentes $r(s)$, pueden ser resueltas numéricamente usando s como el parámetro

$$\frac{d}{ds} n \frac{dr}{ds} = \frac{d\nabla S}{ds} = \nabla n$$

Podemos escribir

$$S(x) - S[x(\lambda_o)] = \int_{\lambda_o}^{\lambda_f} n[x(\lambda)] d\lambda$$

Por lo tanto si partimos de x_0 y la ecuación del rayo nos lleva a x , entonces podemos calcular cuando cambio S en ese camino. De esta forma podemos encontrar $S(x)$ en todo el espacio. En la practica es mas conveniente integrar hacia atrás. Notemos que de esta forma podemos evaluar como evoluciona la fase

$$\text{Exp}[ik_o S(x) - i\omega t]$$

Con $S(x)$ evaluado (por lo menos numéricamente) podemos ahora estimar

$$E_o(s) = E'_o(s) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^s \frac{\nabla^2 S(s') + \frac{4\pi\sigma(s')}{c}}{n(s')} ds' \right] \quad (2)$$

a lo largo de rayo. Con esto obtenemos

$$E(x) \text{Exp}[ik_o S(x) - i\omega t]$$

el campo en todo el espacio siempre y cuando lo conozcamos en alguna interfase.

3.3. Principio de Fermat

El principio de Fermat establece que un rayo miminizará el tiempo que toma viajar de el punto A al B , luego

$$[A, B] = \int_S \frac{dr}{V} = \int_S \frac{n}{c} dr \sim \int_A^B n(x, y, z) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} ds = \int_A^B F ds$$

Usamos los métodos entandar para minimizar esta relación para el camino, para obtener

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{ds} n \frac{dr}{ds} = \nabla n$$

la cual es la ecuación de rayo. Notemos que podemos usar directamente el índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon}$, o más general, podemos usar la velocidad de fase de una onda. Por ejemplo la velocidad de fase

$$n \sim \frac{c}{v_{ph}} = \frac{k(\omega)c}{\omega}$$

esto se obtiene de la relación de dispersión h del plasma.

Problema: de la propagación magneto esférica: En un plasma con un campo magnético B , Alfvén ganó el Nobel mostrando que uno de los modos de propagación es una onda de Alfvén con una velocidad de fase proporcional a la magnitud del campo magnético. Muestre numéricamente que el campo dipolo de la tierra no puede actuar como una longitud que se enfoca para las ondas de Alfvén en el viento solar. De hecho estas ondas pueden ser enfocadas sólo cuando el campo magnético alrededor de la tierra cambia topológicamente.

Problema: Dos problemas estándar de Fermat (línea y el índice $n \sim x^2$)

3.4. Suma de fases e integrales de camino

En la obtención de la ecuación de rayo desde el formalismo de reducción al mínimo, debemos aumentar la siguiente ecuación. Cómo lo hace el rayo sepa por adelantado que camino tomar. La respuesta es que el rayo muestra todos los caminos posibles, esto está relacionado con el formalismo de integral de camino que hizo a R. Feynman famoso. La idea es que el rayo toma todos los caminos posibles y la probabilidad que el rayo alcance un punto B está dada por

$$\tau = \int_{S_i} n ds \quad \rightarrow \quad P(A, B) \sim \sum_{\text{todos los } S_i} \exp(i\omega\tau)$$

Se puede ver que la trayectoria clásica que minimiza la fase de Fermat alcanza el punto B . Para cualquier otra trayectoria cancela cada una en fases. En la mecánica cuántica esto es verdad sin una longitud de onda λ del camino clásico.

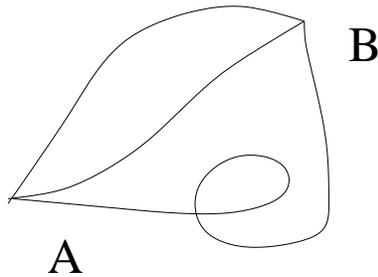


Figura 5: Diferentes caminos generan diferentes fases.

Haga un problema con el espejo usando Fermat y las fases.

3.5. Paralelismo con la mecánica clásica y cuántica

Notemos que a través de la Eikonal fuimos capaces de aproximar las ecuaciones de onda de Maxwell con una ecuación diferencial ordinaria para el rayo. Es interesante notar que la mecánica clásica (las ecuaciones de Hamilton) son exactamente esta misma aproximación de las ecuaciones de Schrödinger, y el método de aproximación es el mismo. Notemos el paralelismo:

Ecuaciones de Maxwell	Ecuación de Schrodinger
Ecuación del rayo	Ecuación de Hamilton (Newton)
Eikonal $S = \int_{\lambda_o}^{\lambda_f} n ds$	Acción $A = \int_{t_o}^{t_f} L dt$
Principio de Fermat $\delta S = 0$	Principio de Hamilton $\delta A = 0$
Propagador $\sum Exp[ik_o S]$	Propagador $\sum Exp[i\hbar A]$
Ecuación Eikonal $(\nabla S)^2 = n^2$	Hamilton Jacobi $(\nabla T)^2 = 2m(E - U)$
Limite $k_o L \gg 1$	Limite $pL \gg \hbar$
onda $Exp[ik_o S - i\omega t]$	onda $Exp[(ik_o T - iEt)/\hbar]$

Por lo tanto vemos que en óptica las trayectorias están dadas por la normal \hat{k} a las superficies de S constante. Mientras que en la mecánica la transformación canónica $p = \nabla T$ es perpendicular a las superficies de fase T constante. Esto ultimo es equivalente a superficies de fase A constante ya que

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial q} \dot{q} = -H + p\dot{q} = L$$

ya que $T(q, \bar{p}, t)$, pero $\bar{p} = const.$ Por lo tanto

$$T[q(t), \bar{p}, t] = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

4. Superposición de amplitudes

Tomemos la superposición de ondas de ondas con un índice de refracción variable.

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx$$

Es en general una cosa de elección considerar ω o k como la variable independiente. Depende de la naturaleza de las condiciones iniciales del problema, a saber si $\partial/\partial x = 0$ o $\partial/\partial t = 0$ entonces podemos expandir en k y ω respectivamente.

4.1. Medio dispersivo

Asumamos que $\omega(k)$ tiene el valor máximo cerca de ω_o . Luego

$$\begin{aligned}
\omega(k) &= \omega_o + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_o} (k - k_o) + \dots \\
u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i \left[k_o \frac{d\omega}{dk} \Big|_{\omega_o} - \omega_o \right] t} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i \left[x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{\omega_o} \right] k} dk \\
&= u \left(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_o} t, 0 \right) e^{i \left[k_o \frac{d\omega}{dk} \Big|_{\omega_o} - \omega_o \right] t}
\end{aligned}$$

lo cual significa que un pulso inicial mueve la fase y el grupo velocidad está dado por

$$\begin{aligned}
v_p &= \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)} \\
v_g &= \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_o}
\end{aligned}$$

Como nota final, cuando describimos un material debemos tener cuidado en definir una condición casual, especialmente cuando

$$D(x, \omega) = \varepsilon(\omega)E(x, \omega)$$

no todos estos modelos están casualmente conectados, según lo caracterizado por la integral de convolución

4.2. Medio disipativo