

Solución control $n^{\circ} 3$

Ecuaciones Diferenciales

24 de noviembre de 2017

1. Resuelva el sistema $x' = Mx$, donde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

Los valores propios de la matriz M son

$$\lambda_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}i \wedge \lambda_2 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i$$

Buscamos los vectores propios asociados con la ecuación $(M - \lambda_1 I)\vec{z} = \vec{0}$.

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i & -4 \\ 2 & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i\right) z_1 - 4z_2 \\ 2z_1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i\right) z_2 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2}i\right) z_1 &= 4z_2 \\ 2z_1 &= \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2}i\right) z_2 \end{aligned}$$

Luego de una breve inspección notamos que ambas ecuaciones nos entregan la misma información:

$$z_1 = \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}i\right) z_2.$$

Por lo tanto el vector propio asociado es

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{23}}{4} \\ 0 \end{pmatrix} i$$

Construimos la matriz:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{23}}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cuya inversa es:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{23}} & \frac{3}{\sqrt{23}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} e^{Mt} &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{23}}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) & -e^{\frac{5}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) \\ e^{\frac{5}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) & e^{\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{23}} & \frac{3}{\sqrt{23}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{\frac{5}{2}t} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) - \frac{3}{\sqrt{23}} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) & -\frac{8}{\sqrt{23}} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) \\ \frac{4}{\sqrt{23}} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) & \frac{3}{\sqrt{23}} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego, la solución del sistema es:

$$x(t) = e^{Mt}x_0,$$

donde x_0 es una condición inicial.

2. Determine e^B para

$$B = \begin{bmatrix} \alpha \cos(2015\pi) & 1 & 0 \\ 0 & \alpha \cos(2017\pi) & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \cos(2019\pi) \end{bmatrix}$$

Solución:

Primero notemos que

$$\cos(2015\pi) = \cos(2017\pi) = \cos(2019\pi) = -1,$$

entonces B queda:

$$B = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Además,

$$B = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notemos también que si

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$L^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge L^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$(-\alpha I_2)L = L(-\alpha I_2) = -\alpha L = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^B = e^{-\alpha I_2 + L} = e^{-\alpha I_2} e^L,$$

donde

$$e^{-\alpha I_2} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\alpha} \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} e^L &= I + L + \frac{L^2}{2} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$e^B = \begin{bmatrix} e^{-\alpha} & e^{-\alpha} & \frac{e^{-\alpha}}{2} \\ 0 & e^{-\alpha} & e^{-\alpha} \\ 0 & 0 & e^{-\alpha} \end{bmatrix}$$

3. Demostrar que si

$$\|e^{At}\| \leq e^{-\delta t}, \delta > 0.$$

Toda solución $t \rightarrow \vec{x}(t)$ del problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) &= A\vec{x}(t) \\ \vec{x}(0) &= \vec{x}_0 \end{cases}$$

cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{0}.$$

Solución:

$$\|\vec{x}(t)\|_2 = \|e^{At}\vec{x}_0\| \leq \|e^{At}\| \|\vec{x}_0\|_2 \leq e^{-\delta t} \|\vec{x}_0\|_2.$$

(Donde la primera desigualdad proviene de un resultado visto en clases y la segunda es por hipótesis). Luego

$$\|\vec{x}(t)\|_2 \leq e^{-\delta t} \|\vec{x}_0\|_2.$$

Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{x}(t)\|_2 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} \|\vec{x}_0\|_2 = 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{0}.$$