Guía de ejercicios de Teoría de Grupos.
Estructuras algebraicas. Segundo semestre 2017

1. Demuestre que si $G \leq \mathbb{Z}$, entonces existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $G = n\,\mathbb{Z}$

   Solución: Si $G = \{0\}$, entonces $G = 0\,\mathbb{Z}$. Supongamos ahora que $G \neq \{0\}$, de manera que G contiene un entero no nulo. Consideremos el conjunto $X = G \cap \mathbb{N}$ que por la suposición anterior no es vacío (si G contiene un entero negativo, entonces también contiene su opuesto). Por el principio del buen orden, existe $n \in X$ un menor elemento. Como G es un grupo, $nk \in G \;\; \forall\, k \in Z$, de manera que $n\,\mathbb{Z} \subseteq G$. Si $a \in G$, por el algoritmo de división existen enteros q, r tales que $a = nq + r$ con $0 \leq r < n$. Pero $r = a - nq \in G$ por lo que la minimalidad de n en X implica que $r = 0$. Es decir $a \in n\,\mathbb{Z}$. Queda demostrado que $G = n\,\mathbb{Z}$.

2. Para $n \leq 20$, ¿cuáles grupos $U(n)$ son cíclicos? Conjeture qué se cumple en general. ¿Puede demostrar su conjetura?

   Solución: Los grupos que son cíclicos para $n \leq 20$ son

   $$U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_9, U_{10}, U_{11}, U_{13}, U_{14}, U_{17}, U_{18}, U_{19}$$

   En general, U_n es cíclico si $n = p^k$ o $n = 2p^k$ con p un primo impar. Además U_4 es cíclico.

3. Sea A un grupo abeliano y B un subgrupo de A. Pruebe que A/B es un grupo abeliano. Dé un ejemplo de un grupo no abeliano G con un subgrupo normal K tal que G/K es abeliano.

   Solución: Como A es un grupo abeliano, $A/B = \{Ba \mid a \in A\}$ es un grupo con la operación $BxBy = Bxy$. Debemos verificar que esta operación está bien definida. Si $x' = b_1 x$, $y' = b_2 y$, entonces $x'y' = b_1 x b_2 y = b_1 b_2 xy \in Bxy$. De la misma forma, usando que A es abeliano, tenemos $B_x B_y = Bxy = Byx = B_y B_x$, de manera que A/B es abeliano.

   Para el ejemplo pedido, considere $G = S_3$ y $K = \{(), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} \leq G$. Entonces $G/K = \{K, K(1\ 2)\}$ es abeliano (isomorfo a $\mathbb{Z}_2$).

4. Encuentre cinco grupos de orden 8 no isomorfos entre sí.

   Solución: Los grupos abelianos de orden 8 son $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_8$. Además hay dos grupos no abelianos de orden 8 que son D_4, el grupo dihedral de orden 8 y el grupo de cuaterniones.

5. Demuestre que S_4 no es isomorfo a D_{12}.

   Solución: Lo primero es preguntarse sobre el orden de los grupos. En este caso ambos tienen el mismo orden por lo que no podemos usarlo como argumento de que no sean isomorfos. Lo que sí podemos usar, es que D_{12} tiene un elemento central de orden 2, la rotación en 180°, pero ningún elemento de orden 2 en S_4 es central. Para justificar esto último, hacemos cálculos explícitos que muestran que los elementos de orden 2 no conmutan con otros elementos de S_4. Como los elementos de orden 2 vienen en dos tipos, verificamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (ab)(abc) = (bc) &\neq (ac) = (abc)(ab) \\ (ab)(cd)(abc) = (bdc) &\neq (acd) = (abc)(ab)(cd) \end{aligned}$$

6. Demuestre que S_n es isomorfo a un subgrupo de A_{n+2}.

   Solución: Podemos definir $\varphi : S_n \to A_{n+2}$ como

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma \text{ es par,} \\ \sigma \circ (n+1, n+2) & \text{si } \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

   En primer lugar, en todos los casos $\varphi(\sigma) \in A_{n+2}$ de manera que la función está bien definida. Debemos mostrar que φ es un homomorfismo y que es 1-1. Notemos que σ y τ conmutan con $(n+1, n+2)$ pues son disjuntas. Si $\sigma, \tau \in S_n$ debemos verificar que $\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau)$. Si ambas son permutaciones pares, entonces $\sigma\tau$ es una permutación par y se cumple la igualdad. Si una de ellas es una permutación par y la otra es impar, entonces el producto es impar y también se verifica la igualdad. Finalmente si ambas son impares, el producto es par y $\varphi(\sigma\tau) = \sigma\tau = \sigma(n+1, n+2)\tau(n+1, n+2) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau)$.

   Para ver que φ es 1-1 basta con calcular su núcleo. Si $\varphi(\sigma) = ()$, entonces σ es par pues de lo contrario $\varphi(\sigma)(n+1) = n+2$. Concluimos que Si $\varphi(\sigma) = \sigma = ()$.

   Por el Primer Teorema de Isomorfía, la imagen de φ en A_{n+2} es isomorfa a S_n.

7. Pruebe que si H y K son subgrupos normales de G entonces $H \cap K$ también lo es. Demuestre que la intersección de una colección cualquiera no vacía de subgrupos normales en G es un subgrupo normal en G.

   Solución: Como el caso de dos subgrupos normales es un caso especial, supongamos que $\{K_\alpha \mid K_\alpha \leq G \ \ \forall \alpha \in A\}$ es una colección no vacía de subgrupos normales de G. Queremos demostrar que

$$K = \bigcap_{\alpha \in A} G_\alpha = \{x \in G \mid x \in K_\alpha \ \ \forall \alpha \in A\}$$

   es un subgrupo normal de G.

   Es claro que $K \neq \emptyset$ pues $e \in K$. Ahora, si $g, h \in K$, entonces $g, h \in K_\alpha \ \ \forall \alpha \in A$. K_α son subgrupos de G, tenemos $gh^{-1} \in K_\alpha \ \ \forall \alpha \in A$ y por lo tanto $gh^{-1} \in K$.

   Si $g \in G, h \in K$, tenemos $h \in K_\alpha \ \ \forall \alpha \in A$ y como estos subrupos son normales, $ghg^{-1} \in K_\alpha \ \ \forall \alpha \in A$. En consecuencia $ghg^{-1} \in K$ y por ende $gKg^{-1} \subseteq K$ lo que demuestra que $K \trianglelefteq G$.

8. Pruebe que si $N \trianglelefteq G$ y H es cualquier subgrupo de G entonces $N \cap H \trianglelefteq H$.

   Solución: La demostración de que $N \cap H$ es un subgrupo de H es similar a lo hecho en el ejercicio anterior. Para ver la normalidad, sea $h \in H$. Como $N \trianglelefteq G$, $h(N \cap H)h^{-1} \subseteq hNh^{-1} \subseteq N$ y como H es un grupo, $h(N \cap H)h^{-1} \subseteq hHh^{-1} \subseteq H$. En conclusión $h(N \cap H)h^{-1} \subseteq N \cap H$, comprobando la normalidad.

9. Sea G un grupo y $Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ todo } g \in G\}$ su centro. Demuestre:

   a) $Z(G) \trianglelefteq G$,

   b) si $G/Z(G)$ es un grupo cíclico entonces G es un grupo abeliano.

   Solución:

   a) Veamos que $Z(G)$ es un subgrupo de G. Como $eg = g = ge$ para cualquier g en el grupo, tenemos $e \in Z(G)$. Ahora si $x, y \in Z(G)$ y $g \in G$, entonces

   $$xy^{-1}g = xy^{-1}gyy^{-1} = xy^{-1}ygy^{-1} = xgy^{-1} = gxy^{-1}$$

   de manera que $xy^{-1} \in Z(G)$. Por lo tanto $Z(G)$ es un subgrupo de G. Para comprobar que es un subgrupo normal, sea $z \in Z(G)$ y sea $g \in G$. Entonces $gzg^{-1} = zgg^{-1} = z \in Z(G)$, por lo tanto $Z(G) \trianglelefteq G$.

   b) Supongamos ahora que $G/Z(G)$ es un grupo cíclico, es decir que existe $g \in G$ tal que $G/Z(G) = \langle Z(G)g \rangle$. Si g_1, g_2 son elementos cualquiera en G, entonces existen $z_1, z_2 \in Z(G)$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $g_1 = z_1 g^{k_1}$ y $g_2 = z_2 g^{k_2}$. Podemos calcular

   $$\begin{aligned} g_1 g_2 &= z_1 g^{k_1} z_2 g^{k_2} \\ &= z_1 z_2 g^{k_1+k_2} \text{ pues } z_2 \in Z(G) \\ &= z_1 z_2 g^{k_2} g^{k_1} \\ &= z_2 g^{k_2} z_1 g^{k_1} \text{ pues } z_1 \in Z(G) \\ &= g_2 g_1 \end{aligned}$$

   Como g_1 y g_2 eran arbitrarios, hemos demostrado la conmutatividad de G. Debemos destacar que no es suficiente para esta demostración que $G/Z(G)$ sea un grupo abeliano. Para encontrar un ejemplo de esta última situación considere el grupo D_8.

10. Demuestre que $Z(S_n) = \{e\}$ para todo $n \geq 3$.

    Solución: Sea $\sigma \in Z(S_n)$ y supongamos que $\sigma \neq e$, es decir que existen $i, j \in \{1, \dots n\}$ tales que $i \neq j$ y $\sigma(i) = j$. Como $n \geq 3$, podemos elegir $k \in \{1, \dots n\} \setminus \{i, j\}$. Ahora sea $\tau = (i, k) \in S_n$ y calculemos $\tau^{-1}\sigma\tau$ evaluado en k.

    $$\tau^{-1}\sigma\tau(k) = \tau\sigma(i) = \tau(j) = j$$

    Como $\sigma(i) = j$, tenemos $\sigma(k) \neq j$ y $\tau^{-1}\sigma\tau \neq \sigma$, lo que contradice que $\sigma \in Z(S_n)$. La contradicción vino de suponer que $\sigma \neq e$.

11. Sea σ la permutación en S_n $(n \geq 4)$ dada por $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$. Demuestre que $|C_{S_n}(\sigma)| = 8(n-4)!$.

    Solución: Supongamos que $\tau \in C_{S_n}(\sigma)$, es decir $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$. Comparando las expresión en ciclos disjuntos, tenemos

    $$(\tau(1)\ \tau(2))(\tau(3)\ \tau(4)) = (1\ 2)(3\ 4)$$

    Debemos contar las posibles permutaciones τ que cumplen esta igualdad. $\tau(1)$ tiene 4 valores posibles y para cada uno de esos valores $\tau(2)$ está determinado y $\tau(3)$ tiene 2 valores posibles. En total hay 8 formas de elegir $\tau(1), \tau(2), \tau(3), \tau(4)$. Además, tenemos $(n-4)!$ maneras de permutar $\{5, \dots n\}$, obteniendo la respuesta pedida.

12. Sea $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ en S_5. En cada uno de los casos siguientes encuentre un elemento $\tau \in S_5$ tal que

    $$i)\ \ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2, \quad ii)\ \ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}, \quad iii)\ \ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-2}.$$

    Solución: (La respuesta no es única)

    $$i)\ \ \tau = (2\ 3\ 5\ 4), \quad ii)\ \ \tau = (2\ 5)(3\ 4), \quad iii)\ \ \tau = (2\ 4\ 5\ 3)$$

13. Pruebe que si H y K son subgrupos finitos de G con órdenes relativamente primos entre si, entonces $H \cap K = \{e\}$.

    Solución: Sabemos que $H \cap K$ es un subgrupo de G y por lo tanto es un subgrupo tanto de H como de K. Por el teorema de Lagrange, $|H \cap K|$ divide tanto a $|H|$ como a $|K|$ por lo que divide al máximo común divisor de ambos. Concluimos que $|H \cap K| = 1$ y $H \cap K = \{e\}$.

14. Enuncie y demuestre el segundo teorema de isomorfía para grupos.

    Solución: Sea H un subgrupo de un grupo G y sea N un subgrupo normal de G. Entonces

    $$HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}$$

    es un subgrupo de G, $H \cap N \trianglelefteq H$ y

    $$H/(H \cap N) \cong (HN)/N$$

    Demostración: Como $e \in H$ y $e \in N$, tenemos $e = ee \in HN$. Ahora si $x, y \in HN$, entonces existen $h_1, h_2 \in H$ y $n_1, n_2 \in N$ tales que $x = h_1n_1$, $y = h_2n_2$. Calculemos

    $$\begin{aligned} xy^{-1} &= h_1n_1(h_2n_2)^{-1} \\ &= h_1n_1n_2^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_1h_2^{-1}n_3 \text{ con } n_3 \in N \text{, por la normalidad de } N \\ &= h_3n_3 \text{ con } h_3 \in H \text{, pues } H \text{ es un grupo} \end{aligned}$$

Con esto verificamos que $xy^{-1} \in HN$ y por ende HN es un subgrupo de G. Por el ejercicio 8, $H \cap N \trianglelefteq H$. Finalmente consideremos el homomorfismo $\varphi : H \to HN/N$ definido por $\varphi(h) = hN$. Para demostrar que φ es un epimorfismo, sea $hnN \in HN/N$ un elemento cualquiera. Como $hnN = hN$, es claro que $\varphi(h) = hnN$. Finalmente, $\ker(\varphi) = \{h \in H \mid hN = N\} = N$ y por el primer teorema de isomorfía, $H/(H \cap N) \cong (HN)/N$.

15. Enuncie y demuestre el tercer teorema de isomorfía para grupos.

    Solución: Sea $\varphi : G \to G'$ un epimorfismo con $\ker(\varphi) = K$. Si $N' \trianglelefteq G'$ y $N = \{g \in G \mid \varphi(g) \in N'\}$ es la preimagen de N, entonces $G/N \cong G'/N'$.

    Demostración: Sea $\psi G \to G'/N'$ definido por $\psi(g) = \varphi(g)N'$. Es claro que ψ es un epimomorfismo pues es la composici'on de φ con el epimorsfismo canónico de G' en G'/N'. Además $\ker(\psi) = \{g \in G \mid \varphi(g) \in N'\} = N$ y por el primer teorema de isomorfía, $G/N \cong G'/N'$.

16. Sea G un grupo finito, H un subgrupo de G y $N \trianglelefteq G$. Pruebe que si $|H|$ y $[G : N]$ son relativamente primos entonces $H \leq N$.

    Solución: Sabemos que $[G : N] = [G : HN][HN : N]$. Por el segundo teorema de isomorfía, $HN/N \cong H/(H \cap N)$ de manera que $[HN : N]$ divide a $|H|$ y a $[G : N]$ y como estos son relativamente primos, tenemos $[HN : N] = 1$ y en consecuencia $H \leq N$.

17. Si G es un grupo y $N \trianglelefteq G$ es tal que G/N es abeliano, entonces

    $$aba^{-1}b^{-1} \in N \quad \forall\, a, b \in G.$$

    Solución: Sean $a, b \in G$. Como G/N es abeliano, tenemos que $aNbNa^{-1}Nb^{-1}N = N$, es decir $aba^{-1}b^{-1}N = N$ por lo que $aba^{-1}b^{-1} \in N$.

18. Si G es un grupo y $N \trianglelefteq G$ es tal que

    $$aba^{-1}b^{-1} \in N \quad \forall\, a, b \in G,$$

    entonces G/N es abeliano.

    Solución: Sean $aN, bN \in G/N$. Entonces $aba^{-1}b^{-1}N = N$ y $bNaN = aba^{-1}b^{-1}baN = abN = aNbN$ de manera que G/N es abeliano.

19. Si G es un grupo, $N \trianglelefteq G$ y $g \in G$ tiene orden finito n, demuestre que el orden de $Ng \in G/N$ divide a n.

    Solución: Observemos que $(Ng)^n = Ng^n = Ne$ y usemos el siguiente resultado más general para demostrar lo pedido.

    Lema: En un grupo cualquiera, si $g^n = e$, entonces $o(g)$ divide a n.

Demostración: Sea $m = o(g)$. Por el algoritmo de división, $n = mq + r$ con $0 \leq r < m$. Notemos que $g^r = g^{n-mq} = g^n(g^m)^{-q} = e$. Pero m es el menor entero positivo con esta propiedad de manera que $r = 0$, probando que m divide a n.

20. Si $\varphi : G \to G'$ es un epimorfismo y $N \trianglelefteq G$, demuestre que $\varphi(N) \trianglelefteq G'$.

    Solución: Sea $g' \in G'$. Como φ es epimorfismo, existe $g \in G$ con $\varphi(g) = g'$. Entonces $g'\varphi(N)(g')^{-1} = \varphi(gNg^{-1}) = \varphi(N)$.

21. Demuestre que si G es un grupo de orden 35, entonces es cíclico.

    Solución: Por el teorema de Cauchy, G tiene elementos de orden 5 y 7. Digamos que $g, h \in G$ son tales que $o(g) = 5$ y $o(h) = 7$. Demostremos que $H = \langle h \rangle$ es el único subgrupo de G de orden 7 y por lo tanto es normal. Supongamos que $k \in G$ es un elemento de orden 7. Consideremos los elementos $h^i k^j$ con $0 \leq i, j < 7$. Como hay solamente 35 elementos en G, estos 49 no pueden ser todos diferentes. Supongamos que $h^{i_1}k^{j_1} = h^{i_2}k^{j_2}$ con $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$. Si $j_1 = j_2$, entonces $h^{i_1} = h^{i_2}$ de manera que $i_1 = i_2$ contradiciendo la suposición. Podemos entonces suponer que $j_1 < j_2$. Como $0 < j_2 - j_1 < 7$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(j_2 - j_1)m \equiv 1 \mod 7$. Tenemos:

    $$k = (k^{j_2 - j_1})^m = (h^{i_1 - i_2})^m \in H$$

    Hemos demostrado que $H \trianglelefteq G$. Supongamos ahora que $ghg^{-1} = h^i$, es decir $gh = h^i g$. Como $g^5 = 1$, tenemos $h = g^5 h = g^4 h^i g = \cdots = h^{i^5} g^5 = h^{i^5}$ y por lo tanto $i^5 \equiv 1 \mod 7$. Pero por el pequeño teorema de Fermat $i^6 \equiv 1 \mod 7$ de manera que $i \equiv 1 \mod 7$ y $gh = hg$. Podemos entonces ver que $o(gh) = 35$ y $G = \langle gh \rangle$

22. Construya un grupo no abeliano de orden 21.

    Solución: Observemos primero que un grupo de orden 21 necesariamente tiene un subgrupo normal de orden 7 (argumento análogo al ejercicio anterior) y otro subgrupo de orden 3. Este último no puede ser normal pues de otra manera el grupo completo sería abeliano. Digamos que $g, h \in G$ son tales que $o(g) = 3$ y $o(h) = 7$. Supongamos ahora que $ghg^{-1} = h^i$, es decir $gh = h^i g$ (con $i \neq 1$). Como $g^3 = 1$, tenemos $h = g^3 h = h^{i^3}$ y por lo tanto $i^3 \equiv 1 \mod 7$. Es decir $i = 2$ o $i = 4$ (resolviendo la congruencia). Podemos presentar un ejemplo como

    $$\langle a, b \mid a^7 = b^3 = 1, bab^{-1} = a^2 \rangle$$

    Para mostrar el grupo de forma concreta, consideremos las permutaciones $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$ y $(2\,3\,5)(4\,7\,6)$. El grupo generado por estas dos permutaciones cumple las condiciones.

23. Demuestre que un grupo de orden 99 tiene un subgrupo normal no trivial.

    Solución: El argumento del ejercicio 21 se adapta directamente a esta nueva situación.

24. Si G es un grupo y A, B son subgrupos, demuestre que el subconjunto $AB \subseteq G$ tiene cardinalidad $\dfrac{|A||B|}{A \cap B}$.

    Solución: Para que el enunciado tenga sentido supongamos que $A \cap B$ es finito. Si no queremos suponer eso, podemos reescribir la ecuación como

    $$|AB||A \cap B = |A||B|$$

    Consideremos $X = A \cap B \leq G$ y $f : A \times B \to AB$ definida por $f(a, b) = ab$. Notemos que si $ab = a_1 b_1$, entonces $a^{-1} a_1 = b b_1^{-1} = x \in X$ y podemos escribir $a_1 = ax$, $b_1 = x^{-1} b$. Concluimos que

    $$f^{-1}(ab) = \{(ax, x^{-1}b) | x \in X\}.$$

    Como este último conjunto es equinumeroso con X para todo $ab \in AB$, tenemos la igualdad de cardinalidades buscada. (En realidad esta última afirmación me parece intuitivamente correcta pero no sé cómo demostrarla).

25. Usando el hecho que todo grupo de orden 9 es abeliano, demuestre que todo grupo de orden 99 es abeliano.

    Solución: Sea G un grupo de orden 99 y N un subgrupo normal de orden 11 (ejercicio 23). Consideremos el homomorfismo canónico $\varphi : G \to G/N$. Como G/N es un grupo de orden 9, y aceptamos que por ello es abeliano, tiene un subgrupo normal K de orden 3. Por el teorema de correspondencia $\varphi^{-1}(K) = H$ es un subgrupo normal de G que tiene índice 3. Argumentando de forma análoga al ejercicio 21, este grupo de orden 33 es abeliano y por ende cíclico. Ahora escribamos $H = \langle h \rangle$ y supongamos que $g \in G$. Queremos demostrar que $gh = hg$ para que tengamos $H \subseteq Z(G)$.

    Tenemos $ghg^{-1} = h^i$, es decir $gh = h^i g$ (i es relativamente primo con 33 pues h^i tiene orden 33). Como $g^{99} = 1$, tenemos $h = g^{99} h = h^{i^{99}}$ y por lo tanto $i^{99} \equiv 1 \mod 33$. Pero por el teorema de Euler $i^{20} \equiv 1 \mod 33$ de manera que $i \equiv 1 \mod 33$ y $gh = hg$. Usando el ejercicio 9 que demostraba que si el cociente con el centro es cíclico, el grupo es abeliano, estamos listos.

26. Demuestre que si G es un grupo de orden p^2 con p un número primo, entonces G es abeliano. Ayuda: Primero demuestre que $|Z(G)| > 1$ y luego use el ejercicio 9.

    Solución: Supongamos que $x \in G$ y consideremos la clase de conjugación de x en G, es decir el conjunto

    $$[x] = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$$

Consideremos además el subgrupo de los elementos de G que conmutan con x, es decir

$$H = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$$

Afirmamos que $f : G/H \to [x]$ definido por $f(gH) = gxg^{-1}$ es una biyección.

Veamos primero que está bien definida. Si $g' = gh$ es otro representante de la clase gH, entonces

$$g'xg'^{-1} = ghxh^{-1}g^{-1} = gxg^{-1}$$

La epiyectividad de f es inmediata por la definición de $[x]$. Ahora supongamos que $f(gH) = f(g'H)$. Entonces $gxg^{-1} = g'xg'^{-1}$ por lo que $g^{-1}g' \in H$ y $gH = g'H$. Esto comprueba la inyectividad de f.

Con esto estamos listos para demostrar que $|Z(G)| > 1$. El grupo G se descompone en clases de conjugación que por lo que hemos visto, pueden tener 1 o p elementos. Al menos una de las clases tiene 1 elemento (la clase de la identidad), pero el orden del grupo es divisible por p de manera que hay otras clases de tamaño 1. Si $|[x]| = 1$, entonces $x \in Z(G)$. Concluimos que $|Z(G)| > 1$.

Ahora el orden del cociente $G/Z(G)$ puede ser 1 o p. Si es 1, estamos listos. Si es p, podemos usar el ejercicio 9 para demostrar que G es abeliano, lo que es una contradicción y por lo tanto $G = Z(G)$ es abeliano.

27. Sea S es un conjunto finito y $f : S \to S$ una función inyectiva.

    a) Demuestre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}} = i_S$ (la función identidad).

    b) Si S tiene m elementos, encuentre un valor de n que sirva para todas las posibles funciones f.

    c) Si S tiene 10 elementos, encuentre f tal que el menor valor de n que sirve sea maximal.

    Solución: Para simplificar la notación, usaremos f^n para representar la composición de f consigo misma n veces.

    a) Como S es un conjunto finito, solo existe un número finito de posibles funciones de S en S. Entonces las funciones $f, f^2, f^3, ...$ no pueden ser todas diferentes y deben existir $n_1 n_2$ tales que $f^{n_1} = f^{n_2}$. Como f es una función inyectiva, sabemos que $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$. Repitiendo esta "cancelación" n_1 veces tenemos $i_S = f^{n_2 - n_1}$ y $n = n_2 - n_1$ cumple lo pedido.

    b) Como S es un conjunto finito, las funciones inyectivas de S en S también son sobreyectivas y por lo tanto forman el grupo de permutaciones de S. Como el orden del grupo es $m!$, éste es un valor que sirve siempre.

c) Una permutación de 10 elementos de orden maximal es $(1,2)(3,4,5)(6,7,8,9,10)$ que tiene orden 30.

28. Sea $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal de un grupo G. Si H es cíclico, demuestre que todo subgrupo de H es normal en G.

    Solución: Supongamos que H es un subgrupo cíclico, normal en G. Veamos que un subgrupo de H está completamente determinado por su orden. Recordemos que por el Teorema de Lagrange, el orden de un subgrupo divide al orden del grupo.

    Si k divide al orden de H, entonces $K = \{h \in H \mid h^k = 1\}$ es el único subgrupo de H de orden k. Para demostrar esta afirmación, veamos primero que efectivamente K es un subgrupo de H. (Considerando la conmutatividad es claro que el producto de dos elementos en K está en K. El inverso es aún más directo.)

    Para verificar que el orden de K es k, consideremos un generador de H, digamos h y supongamos que el orden de H es n. Entonces $h^l \in K$ si y solo si $(h^l)^k = 1$, es decir lk es divisible por n. En otras palabras, $h^l \in K$ si y solo si l es divisible por $\frac{n}{k}$. Concluimos que $K = \langle h^{\frac{n}{k}} \rangle$ tiene orden k.

    Ahora supongamos que $g \in G$. Entonces $gKg^{-1} \subseteq H$ pues H es normal en G. Como K es el único subgrupo de H de orden k, tenemos $gKg^{-1} = K$ y concluimos que K es normal en G.

29. Demuestre que la normalidad no es transitiva, es decir encuentre un grupo G con un subgrupo normal H que a su vez tenga un subgrupo normal K, pero que K no sea normal en G. En símbolos, $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ pero $K \ntrianglelefteq G$.

    Solución: Un ejemplo podría ser $D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s \mid srs = r^3\}$. El subgrupo $H = \{1, r^2, s, r^2s\}$ es normal en D_4 y el subgrupo $K = \{1, s\}$ es normal en H pero K no es normal en G.