Guía de ejercicios de Teoría de Grupos.
Estructuras algebraicas. Segundo semestre 2017

1. Demuestre que si $G \leq \mathbb{Z}$, entonces existe un $n \in \mathbb{Z}$ tal que $G = n\,\mathbb{Z}$

2. Demuestre que

3. Sea A un grupo abeliano y B un subgrupo de A. Pruebe que A/B es un grupo abeliano. Dé un ejemplo de un grupo no abeliano G con un subgrupo normal K tal que G/K es abeliano.

4. Encuentre cinco grupos de orden 8 no isomorfos entre sí.

5. Demuestre que S_4 no es isomorfo a D_4.

6. Demuestre que S_n es isomorfo a un subgrupo de A_{n+2}.

7. Pruebe que si H y K son subgrupos normales de G entonces $H \cap K$ también lo es. Demuestre que la intersección de una colección cualquiera no vacía de subgrupos normales en G es un subgrupo normal en G.

8. Pruebe que si $N \trianglelefteq G$ y H es cualquier subgrupo de G entonces $N \cap H \trianglelefteq H$.

9. Sea G un grupo y $Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ todo } g \in G\}$ su centro. Demuestre:

   a) $Z(G) \trianglelefteq G$,

   b) si $G/Z(G)$ es un grupo cíclico entonces G es un grupo abeliano.

10. Demuestre que $Z(S_n) = \{e\}$ para todo $n \geq 3$.

11. Sea σ la permutación en S_n ($n \geq 4$) dada por $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$. Demuestre que $|C_{S_n}(\sigma)| = 8(n-4)!$.

12. Sea $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ en S_5. En cada uno de los casos siguientes encuentre un elemento $\tau \in S_5$ tal que

$$i)\ \ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2, \quad ii)\ \ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}, \quad iii)\ \ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-2}.$$

13. Pruebe que si H y K son subgrupos finitos de G con órdenes relativamente primos entre si, entonces $H \cap K = \{e\}$.

14. Enuncie y demuestre el segundo teorema de isomorfía para grupos.

15. Enuncie y demuestre el tercer teorema de isomorfía para grupos.

16. Sea G un grupo finito, H un subgrupo de G y $N \trianglelefteq G$. Pruebe que si $|H|$ y $[G:N]$ son relativamente primos entonces $H \leq N$.

17. Si G es un grupo y $N \trianglelefteq G$ es tal que G/N es abeliano, entonces
$$aba^{-1}b^{-1} \in N \quad \forall\, a, b \in G.$$

18. Si G es un grupo y $N \trianglelefteq G$ es tal que
$$aba^{-1}b^{-1} \in N \quad \forall\, a, b \in G,$$
entonces G/N es abeliano.

19. Si G es un grupo, $N \trianglelefteq G$ y $g \in G$ tiene orden finito n, demuestre que el orden de $Ng \in G/N$ divide a n.

20. Si $\varphi : G \to G'$ es un epimorfismo y $N \trianglelefteq G$, demuestre que $\varphi(N) \trianglelefteq G'$.

21. Demuestre que si G es un grupo de orden 35, entonces es cíclico.

22. Construya un grupo no abeliano de orden 21.

23. Demuestre que un grupo de orden 99 tiene un subgrupo normal no trivial.

24. Si G es un grupo y A, B son subgrupos, demuestre que el subconjunto $AB \subseteq G$ tiene cardinalidad $\dfrac{|A||B|}{A \cap B}$.

25. Usando el hecho que todo grupo de orden 9 es abeliano, demuestre que todo grupo de orden 99 es abeliano.

26. Demuestre que si G es un grupo de orden p^2 con p un número primo, entonces G es abeliano. Ayuda: Primero demuestre que $|Z(G)| > 1$ y luego use el ejercicio 9.

27. Sea S es un conjunto finito y $f : S \to S$ una función inyectiva.

    a) Demuestre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}} = i_S$ (la función identidad).

    b) Si S tiene m elementos, encuentre un valor de n que sirva para todas las posibles funciones f.

    c) Si S tiene 10 elementos, encuentre f tal que el menor valor de n que sirve sea maximal.

28. Sea $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal de un grupo G. Si H es cíclico, demuestre que todo subgrupo de H es normal en G.

29. Demuestre que la normalidad no es transitiva, es decir encuentre un grupo G con un subgrupo normal H que a su vez tenga un subgrupo normal K, pero que K no sea normal en G. En símbolos, $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ pero $K \ntrianglelefteq G$.