Guía de ejercicios de cuerpos.
Estructuras algebraicas. Segundo semestre 2017

1. Si $\varphi : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ es un monomorfismo de anillos, demuestre que $\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Demuestre que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ no es racional. Ayuda: Demuestre que $n!e$ no es entero para ningún n.

3. Demuestre que $x^3 - 3x - 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$.

4. Demuestre que $x^4 + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Factorice $x^4 + 1$ en $\mathbb{F}_p[x]$ para distintos primos p. ¿Puede demostrar que siempre se puede factorizar?

5. Demuestre que el ideal generado por $x^2 - x + 1$ y 13 no es maximal en $\mathbb{Z}[x]$.

6. Demuestre que el ideal generado por $x^2 - x + 1$ y 17 sí es maximal en $\mathbb{Z}[x]$.

7. Si K es un cuerpo finito, demuestre que $|K| = p^n$ para algún p primo y algún $n \in \mathbb{N}$. Ayuda: Considere la característica de K y el subcuerpo $F = \{1, 2, \ldots, p-1\}$.

8. Encuentre $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tales que $(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})(1+\sqrt[3]{2}) = 1$. En general, para $x, y, z \in \mathbb{Q}$ (no todos 0), encuentre una fórmula para calcular el inverso de $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$ en $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

9. Determine el grado de $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$.

10. Determine el grado de $\sqrt{7} + \sqrt[3]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$.

11. Si $a \in \mathbb{C}$ satisface $p(a) = 0$ con
$$p(x) = x^5 + \sqrt{2}x^3 + \sqrt{5}x^2 + \sqrt{7}x + \sqrt{11},$$
demuestre que a es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ de grado a lo más 80.

12. Encuentre un ejemplo de dos números algebraicos a y b de grados 2 y 3 sobre $\mathbb{Q}$ respectivamente, para los cuales ab tenga grado *menor* a 6 sobre $\mathbb{Q}$.

13. Determine el número de polinomios irreducibles de grado 2 sobre $\mathbb{F}_p$. Ayuda: Cuente los polinomios reducibles primero.

14. Determine el número de polinomios irreducibles de grado 3 sobre $\mathbb{F}_p$. Verifique sus cálculos mostrando estos polinomios para $p = 3$.

15. Considere el polinomio $p(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{F}_5[x]$.

    a) Demuestre que $p(x)$ es irreducible, concluyendo que $\mathbb{F}_5[x]/(x^2-2)$ es un cuerpo con 25 elementos.

    b) Denote por α la clase de x y considere $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{F}_5[\alpha]$. Encuentre $\beta \in \mathbb{F}_{25}$ tal que $\mathbb{F}_{25} = \{0, 1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{23}\}$.

    c) Para cada k calcule $f(k)$ tal que $1 + \beta^k = \beta^{f(k)}$ y explique como puede usar estos valores para calcular $\beta^i + \beta^j$ para cualquier i, j.

    d) Encuentre el polinomio minimal sobre $\mathbb{F}_5$ para β.

16. Sea f un polinomio irreducible de grado n en $\mathbb{F}_q[x]$. Muestre que $f(x)$ divide a $x^{q^n} - x$ si y solo si el grado de f divide a n.

17. Encuentre un polinomio irreducible de grado 2 en $\mathbb{F}_9[x]$. Si α es raíz de ese polinomio, encuentre su polinomio minimal sobre $\mathbb{F}_3$.

18. Encuentre una base como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{Q}[\alpha]$, donde α es raíz del polinomio $x^5 + 6x + 3$.

19. Defina una función "derivada" $\delta : F[x] \to F[x]$ como

    $$\delta(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \dots na_nx^{n-1}$$

    y demuestre que es una función lineal que satisface la "regla del producto".

20. Si F es un cuerpo de característica $p > 0$, caracterice los polinomios $f(x) \in F[x]$ que cumplen $\delta(f(x)) = 0$.

21. Sea F un cuerpo cualquiera. Demuestre que si $f(x) \in F[x]$ tiene una raiz con multiplicidad mayor a uno en alguna extensión de F, entonces $f(x)$ y $\delta(f(x))$ no son relativamente primos.

22. Considere el polinomio $x^m - x$ en $\mathbb{F}_p[x]$ con $m = p^n$. Sea K una extensión finita de $\mathbb{F}_p$ sobre la que $x^m - x$ se factoriza como producto de factores lineales. En K, sea K_0 el conjunto de todas las raíces de $x^m - x$. Muestre que K_0 es un cuerpo que tiene a lo más p^n elementos.

23. Sea F un cuerpo de característica p. Demuestre que el polinomio $x^m - x$ en $\mathbb{F}[x]$ con $m = p^n$ tiene todas sus raíces distintas. Use este resultado para demostrar que el cuerpo K_0 del ejercicio anterior tiene exactamente p^n elementos.

24. Si $f(x) \in F[x]$ es irreducible y tiene una raiz de multiplicidad mayor a 1 en alguna extensión de F, demuestre que

    a) F tiene que ser un cuerpo de característica p para algún primo p.

    b) $f(x) = g(x^p)$ para algún $g(x) \in F[x]$.

    c) F tiene que ser un cuerpo infinito. (¿difícil?)

25. Determine el cuerpo K de descomposición de $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y su grado sobre $\mathbb{Q}$. Determine α tal que $K = Q[\alpha]$ y encuentre el polinomio minimal de α sobre $\mathbb{Q}$.

26. Determine el cuerpo de descomposición de $x^4 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ y su grado sobre $\mathbb{Q}$.

27. Determine el cuerpo de descomposición de $x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ y su grado sobre $\mathbb{Q}$.

28. Demuestre que el heptágono regular no es constructible con regla y compás.

29. Demuestre que el pentágono regular sí es constructible con regla y compás.

30. Demuestre que el heptadecágono regular sí es constructible con regla y compás.

31. Demuestre que $\cos 1^\circ$ (un grado) es algebraico sobre $\mathbb{Q}$, pero que no es constructible con regla y compás.

32. Describa los así llamados problemas clásicos de constructibilidad y demuestre la imposibilidad de dos de ellos (el tercero es un desafío mayor).