Prueba N° 1 Estructuras Algebraicas

II Semestre 2017

Elija y resuelva **tres** de los siguientes ejercicios.

1. Determine si la ecuación $x^2 \equiv 757 \pmod{1001}$ tiene solución.
   Ayuda: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

   Solución: Por el teorema chino de los restos, tenemos que

   $$\mathbb{Z}/1001\,\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\,\mathbb{Z}.$$

   Denotemos por φ al isomorfismo y observemos que $\varphi(\overline{757}) = (\overline{1}, \overline{9}, \overline{3})$. Para resolver la ecuación de congruencias módulo 1001, basta ahora resolverla módulo 7, 11 y 13 por separado. Por ejemplo $(\overline{1}, \overline{3}, \overline{4})$ es una solución posible (hay 8 en total) y $\overline{x} = \varphi^{-1}(\overline{1}, \overline{3}, \overline{4})$ es una solución de la ecuación original.

2. Demuestre que los anillos $5\,\mathbb{Z}$ y $3\,\mathbb{Z}$ no son isomorfos.

   Solución: Supongamos que $\varphi : 5\,\mathbb{Z} \to 3\,\mathbb{Z}$ es un homomorfismo de anillos y denotemos $a = \varphi(5)$. Entonces

   $$5a = a + a + a + a + a = \varphi(5 + 5 + 5 + 5 + 5) = \varphi(5 \cdot 5) = a^2$$

   Tenemos por lo tanto $a(a-5) = 0$ en $3\,\mathbb{Z}$. Como $3\,\mathbb{Z}$ es un anillo sin divisores de cero y $5 \notin 3\,\mathbb{Z}$, concluimos que $a = 0$. Como consecuencia, $\varphi(x) = 0 \forall x \in 5\,\mathbb{Z}$ y por lo tanto no es un isomorfismo. (No es inyectivo ni epiyectivo.) Como φ era un homomorfismo arbitrario, concluimos que los anillos no son isomorfos.

3. Demuestre que $\mathbb{C}$ es isomorfo a un subanillo de $M_2(\mathbb{R})$.

   Solución: Definimos $\varphi : \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{R})$ como

   $$\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

   Debemos verificar que es un homomorfismo y que es inyectivo.
   Que $\varphi((a + bi) + (c + di)) = \varphi(a + bi) + \varphi(c + di)$ es inmediato. Veamos lo que pasa con el producto:

   $$\varphi((a + bi)(c + di)) = \varphi((ac - bd) + (ad + bc)i) = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

   Por otra parte

   $$\varphi(a + bi)\varphi(c + di) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{pmatrix}.$$

   Como los resultados son iguales, tenemos demostrado que φ es homomorfismo de anillos. Como además $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si y solo si $a = b = 0$, concluimos que φ es 1-1 y por lo tanto $\mathbb{C}$ es isomorfo a $\varphi(\mathbb{C})$ que es un subanillo de $M_2(\mathbb{R})$.

4. Sea D un dominio de integridad con 1 que resulta ser un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo F. Demuestre que D es un cuerpo.

   Solución: Dadas las hipótesis del problema, solo necesitaremos demostrar que todo elemento no nulo de D tiene un inverso multiplicativo en D. Para ello, sea $a \in D, a \neq 0$. Definimos una función $f_a : D \to D$ como $f_a(x) = ax$. Verificamos que si $x, y \in D$, entonces $f_a(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f_a(x) + f_a(y)$ y que si $\alpha \in F$, entonces $f_a(\alpha x) = a\alpha x = \alpha a x = \alpha f_a(x)$ de manera que f es una función lineal. Como D es un dominio, $ax = 0 \Rightarrow x = 0$ por lo que f_a es 1-1. Pero es sabido que una transformación lineal inyectiva de un espacio vectorial de dimensión finita en sí mismo es epiyectiva por lo que existe $b \in D$ tal que $f_a(b) = 1$, es decir $ab = 1$.

   Observación: Esta demostración requiere que la mutiplicación en el anillo D y la multiplicación escalar del $F-$espacio vectorial D sean la misma operación cuando corresponda. No parece que esa hipótesis se pueda evitar.

   Por ejemplo, dado que existe una biyección entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, podemos definir suma y multiplicación por escalar racional en $\mathbb{Z}$ de manera que sea un espacio vectorial de dimensión uno sobre $\mathbb{Q}$, pero con la operación usual, $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo.