Guía de ejercicios de anillos.
Estructuras algebraicas. Segundo semestre 2017

1. Si p es un número primo, demuestre que $\sqrt{p}$ no es un número racional.

2. Sea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Verifique que este conjunto es un anillo con las operaciones conocidas de $\mathbb{R}$. ¿Tiene un algoritmo de división?

3. Pruebe que la ecuación $x^2 = 35$ no tiene solución en $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$. (Por 35 se entiende la clase de 35.)

4. Sean m, n enteros relativamente primos y sean a, b enteros cualesquiera. Demuestre que existe un entero x que satisface simultáneamente las congruencias

$$\begin{cases} x \equiv a & \text{mód } m \\ x \equiv b & \text{mód } n \end{cases}$$

5. Si I y J son ideales de un anillo A demuestre que los conjuntos

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

$$IJ = \{x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ry_r \mid x_i \in I, y_i \in J, r \in \mathbb{N}\}$$
$$I \cap J = \{a \in A \mid a \in I, a \in J\}$$

son ideales del anillo A. Establezca un orden de contención entre ellos y con los ideales I y J.

6. Dados dos ideales $n\mathbb{Z}$ y $m\mathbb{Z}$ del anillo $\mathbb{Z}$, caracterice los ideales definidos en el ejercicio anterior.

7. En los anillos $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ determine todos los ideales.

8. ¿Cuántos elementos invertibles tiene el anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

9. Si el anillo A es un anillo conmutativo con unidad e I es un ideal maximal, respecto de inclusión, demuestre que el anillo cociente A/I es un cuerpo.

10. Considere el conjunto de todas las matrices de 2×2 con coeficientes racionales. Determine los ideales izquierdos y los ideales biláteros de este anillo.

11. Determine los divisores del cero del anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. ¿Cuántos son?

12. Defina el conjunto $R[[x]]$ de series de potencia formales en la indeterminada x con coeficientes en un anillo conmutativo con uno R, como el conjunto de las sumas infinitas formales

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots$$

Note que estas series formales no necesariamente representan funciones definidas en R. La convergencia no es considerada. Las operaciones en $R[[x]]$ se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ + \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \cdot \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n \end{aligned}$$

   a) Demuestre que $R[[x]]$ es un anillo conmutativo con uno.

   b) Demuestre que $1 - x$ es una unidad en $R[[x]]$ con inverso $1 + x + x^2 + \cdots$.

   c) Demuestre que $\sum a_n x^n$ es una unidad en $R[[x]]$ si y solo si a_0 es una unidad en R.

   d) Demuestre que si R es un dominio de integridad, entonces $R[[x]]$ también lo es.

13. Considere de manera similar al ejercicio anterior el conjunto de series formales

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n = \cdots + a_{-3} x^{-3} + a_{-2} x^{-2} + a_{-1} x^{-1} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots$$

   Explique por qué, con operaciones definidas de forma análoga, no se obtiene un anillo.

14. Demuestre que el centro del anillo $M_n(R)$ de matrices de $n \times n$ con coeficientes en un anillo conmutativo R es el conjunto de matrices escalares.

15. Demuestre que los anillos $2\mathbb{Z}$ y $3\mathbb{Z}$ no son isomorfos.

16. Demuestre que $\mathbb{Z}[x]$ no es isomorfo a $\mathbb{Q}[x]$.

17. Describa todos los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$. En cada caso determine el núcleo y la imagen.

18. Sea $R = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$. Demuestre que la función $\varphi : R \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = (a, c)$ es un epimorfismo y describa el núcleo.

19. Describa todos los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. En cada caso determine el núcleo y la imagen.

20. Describa todos los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. En cada caso determine el núcleo y la imagen.

21. Demuestre que $\mathbb{C}$ es isomorfo a un subanillo de $M_2(\mathbb{R})$.

22. Sea $\varphi : R \to S$ un homomorfismo de anillos.

    a) Demuestre que si J es un ideal de S, entonces $\varphi^{-1}(J)$ es un ideal de R.

    b) Demuestre que si φ es epiyectivo e I es un ideal de R, entonces $\varphi(I)$ es un ideal de S. Muestre un ejemplo donde esto es falso si φ no es epiyectivo.

    c) Demuestre que si P es un ideal primo de S, entonces $\varphi^{-1}(P) = R$ o $\varphi^{-1}(P)$ es un ideal primo de R.

23. Sean I, J ideales en R.

    a) Demuestre que $I + J$ es el menor ideal de R que contiene tanto a I como a J.

    b) Demuestre que IJ es un ideal contenido en $I \cap J$.

    c) Dé un ejemplo donde $IJ \neq I \cap J$.

    d) Demuestre que si R es conmutativo e $I + J = R$, entonces $IJ = I \cap J$.

24. Sea R el anillo de las funciones continuas de $[0, 1] \to \mathbb{R}$ y sea I el conjunto de las funciones $f \in R$ que se anulan en $\frac{1}{2}$ y en $\frac{1}{3}$. Demuestre que I es un ideal de R pero que no es un ideal primo. Demuestre además que $R/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

25. Sea R un anillo conmutativo. Demuestre que si P es un ideal primo de R que no contiene divisores de cero, entonces R es un dominio de integridad.

26. Sea R un anillo conmutativo y P un ideal primo de R. Si I, J son ideales de R que cumplen $IJ \subseteq P$, entonces $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$.

27. Sea D un dominio de integridad. Forme el conjunto $D \times D^*$, de todos los pares ordenados de elementos de D cuyas segundas componentes son elementos de D distintos de 0. Defina la siguiente relación entre estos elementos: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$

a) Demuestre que esta relación es una relación de equivalencia en $D \times D^*$, y denote por $\frac{a}{b}$ a la clase de equivalencia de (a, b).

b) Considere el conjunto de esas clases de equivalencia y defina las operaciones $+$ y $\cdot$ como sigue:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

y

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Demuestre que el conjunto de las clases de equivalencia tiene la estructura de un anillo respecto de las operaciones $+$ y $\cdot$. ¿Es un cuerpo?

c) Compare con la situación de los enteros y los números racionales.

28. Demuestre que los siguientes polinomios son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$.

    a) $x^3 + 3x + 2$

    b) $x^4 - 4x^3 + 6$

    c) $\frac{(x+2)^p - 2^p}{x}$, donde p es un primo impar.

    d) $(x-1)(x-2)\ldots(x-n) - 1$, donde $n \in \mathbb{N}$.

    e) $(x-1)(x-2)\ldots(x-n) + 1$, donde $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 4$.

29. Factorize el polinomio $X^6 - 1$ en cada uno de los anillos siguientes: a) $\mathbb{Z}[x]$, b) $\mathbb{F}_2[x]$, c) $\mathbb{F}_3[x]$.

30. Sea F un cuerpo y φ un automorfismo de $F[x]$ tal que $\varphi(a) = a$ para todo $a \in F$. Si $f(x) \in F[x]$, demuestre que $f(x)$ es irreducible si y solo si lo es $g(x) = \varphi(f(x))$.

31. Describa los automorfismos a los que hace alusión el ejercicio anterior.

32. Demuestre que todo automorfismo de $\mathbb{Q}[x]$ cumple que $\varphi(a) = a$ para todo $a \in \mathbb{Q}$.

33. Sea $F[x]$ el anillo de polinomios sobre un cuerpo F y $f(x) \neq 0$ en $F[x]$. Considere el ideal J generado por $f(x)$ y demuestre que $F[x]/J$ es un espacio vectorial sobre F de dimensión grado$(f(x))$.

34. Sea D un dominio de integridad con 1 que resulta ser un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo F. Demuestre que D es un cuerpo.