Primera guía de ejercicios y tarea.
Estructuras algebraicas. Segundo semestre 2017

Los ejercicios resueltos deberán entregarlos al ayudante el jueves 10 de agosto. Se permite el trabajo en grupos de 2 o 3 personas (entregan una tarea). Los contenidos de la tarea podrán además ser evaluados en un control o prueba futuros.

1. Escriba los axiomas de Peano (puede buscarlos en Internet si no los conoce).

2. Usando la definición recursiva de la suma de números naturales, demuestre que esta es asociativa y conmutativa. Si n' denota al sucesor de n, entonces se define

$$n + 1 = n', \qquad n + m' = (n + m)' \ \forall m \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

3. Defina el producto de números naturales de forma recursiva (usando la suma) y demuestre que es asociativo y conmutativo.

4. Demuestre que si $a, b, c \in \mathbb{N}$, entonces $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.

5. Demuestre que en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación $(n, m) \sim (p, q) \Leftrightarrow n+q = m+p$ es una relación de equivalencia.

6. Considere el conjunto $\frac{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{\sim}$ de las clases de equivalencia por la relación $\sim$, y la suma definida como $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{c}, \mathbf{d}] = [\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{d}]$ donde $[x, y]$ denota la clase de (x, y) en $\frac{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{\sim}$. Demuestre que esta operación está bien definida. ¿Por qué se requiere este paso?

7. Explique como se puede identificar $\frac{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{\sim}$ con el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros que conoce. En lo que sigue llamaremos $\mathbb{Z}$ a este cociente.

8. Demuestre que la operación definida en 6. es una operación asociativa y conmutativa.

9. Demuestre que la operación definida en 6. tiene elemento neutro y cada elemento del conjunto tiene un elemento inverso.

10. En $\mathbb{Z}$ se define una nueva operación:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{ac} + \mathbf{bd}, \mathbf{ad} + \mathbf{bc}).$$

    Demuestre que esta operación está bien definida en $\mathbb{Z}$.

11. Demuestre que la operación definida en 10. es una operación asociativa y conmutativa.

12. Demuestre que la operación definida en 10. tiene elemento neutro pero no todos los elementos del conjunto tienen un elemento inverso. ¿Cuáles elementos son invertibles? Ojo que $0 \notin \mathbb{N}$, de manera que $(1, 0) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.