Curso: Cálculo II
Profesora: Verónica Poblete
Ayudantes: Fabián Hidalgo, Sebastián Rivera

Ayudantía 20 - Series de Taylor

Viernes 24 de Noviembre del 2017

Resumen

- **1. Definición (Serie de Taylor):**
  Cuando una serie de potencias $\sum a_n(x-x_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, decimos que es la **serie de Taylor** en torno al punto x_0 de la función $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$.

- **2. Proposición (Series de Taylor conocidas):**
  - Serie exponencial: $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, con $x \in \mathbb{R}$.
  - Serie del coseno: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, con $x \in \mathbb{R}$.
  - Serie del seno: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, con $x \in \mathbb{R}$.
  - Serie geométrica: $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, con $x \in (-1, 1)$.
  - Serie del logaritmo: $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, con $x \in (-1, 1]$.
  - Serie binomial: $(1+x)^a = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n$, con $a \in \mathbb{R}$ y $x \in (-1, 1)$

Guía de Problemas 20

1. Determine las series de Taylor de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = e^{x^2}$

   (b) $f(x) = \cos(2x+3)$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^6}$

   (d) $f(x) = \ln(1+4x^3)$

2. Encuentre un desarrollo en serie de potencias de $(x-2)$ para la función $f(x) = \dfrac{3}{1+2x}$, y determine el radio de convergencia de la serie obtenida.

3. Encuentre un desarrollo en serie de potencias para las siguientes integrales:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \cos(\sqrt{x})dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-x^2}dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^r \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

4. Use una serie de Taylor para aproximar el área bajo la curva de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ entre $x=0$ y $x=\pi/2$.

5. Aproxime la integral $\displaystyle\int_0^1 \cos(\sqrt{x})dx$ con un error menor a $0,01$.

6. Aproxime la integral $\displaystyle\int_0^1 x\cos(x^3)dx$ con un error menor a $0,0001$.

7. Determine la serie de Taylor de la función $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$ mediante los siguientes pasos:

   (a) Use el Teorema fundamental del cálculo para escribir esta función como una integral entre 0 y x.

   (b) Exprese la función encontrada en la parte anterior como una serie binomial.

   (c) Use el teorema de integración de series para obtener la serie de f.

   (d) Determine el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

   (e) Concluya que $\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^4\cdot 3} + \dfrac{1\cdot 3}{2^6\cdot 4\cdot 5} + ... + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{2n+2}\cdot 4\cdots(2n+1)} + \cdots$

8. Utilizando la serie de Taylor de la función $f(x) = xe^x$, demuestre la fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$$

9. Derive las series de Taylor de las funciones $\operatorname{sen}(x), \cos(x)$ y e^x, y luego compare sus resultados con las series de Taylor de las funciones $\cos(x), -\operatorname{sen}(x)$ y e^x, respectivamente.