Curso: Cálculo II
Profesora: Verónica Poblete
Ayudantes: Fabián Hidalgo, Sebastián Rivera

Ayudantía 19 - Series de Potencias

Jueves 16 de Noviembre del 2017

<u>**Resumen**</u>

- **1. Definición (Serie de potencias)**:
  Una serie de potencias es una serie de funciones de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ y $a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \{0, 1, 2, ...\}$. A x_0 se le conoce como **centro** de la serie de potencias, y a los a_n se les conoce como **coeficientes** de la serie.

- <u>Observación 1</u>: Toda serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge en un intervalo de centro x_0 y radio $R \in [0, \infty]$.

- **2. Teorema (Convergencia absoluta y uniforme de una serie de potencias)**:
  Si la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge en $x - x_0 = b \neq 0$, entonces
  1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge **absolutamente** para todo x tal que $|x-x_0| < |b|$.
  2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge **uniformemente** para todo x tal que $|x-x_0| \leq M|b|$, para todo $M \in (0, 1)$.

- **3. Definiciones (Radio de convergencia e intervalo de convergencia):**
  Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, se define su **radio de convergencia** R como el radio del intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ más grande en el que la serie converge. En tal caso, diremos que I es el **intervalo de convergencia**, y cumple que $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq I \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$

- **4. Proposición (Cálculo del radio de convergencia):**
  Sea $R \in [0, \infty]$ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Se tiene que $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ (d'Alambert) y $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (Cauchy).
  <u>Observación 2</u>: Para efectos de cálculo, diremos que $R = \infty$ si $1/R = 0$.

- **5. Corolario (Continuidad de la serie de potencias):**
  Si $R > 0$ es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum a_n(x-x_0)^n$, entonces la función $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ es continua.

- **6. Teorema (Integración término a término de una serie de potencias):**
  Sea R el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum a_n x^n$. Si $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$, entonces
  $\int_\alpha^\beta (\sum a_n t^n) dt = \sum \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$. En particular, si $0 < x < R$, entonces
  $\int_0^x (\sum a_n t^n) dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

- **7. Teorema (Diferenciación término a término de una serie de potencias):**
  Sea R el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
  La función $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es derivable, con derivada $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ y la serie de potencias de $f'(x)$ tiene radio de convergencia R

Guía de Problemas 19

1. Encuentre el radio y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)^2 \cdot 3^{n+1}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)2^{3n}x^{3n+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2(x+1)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2}x^n$

2. El desarrollo en serie para cierta función f es $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$

(a) Encuentre el radio e intervalo de convergencia de la serie.

(b) Determine la serie que representa $f'(x)$ y preséntela como una función conocida.

(c) Determine $f(x)$ mediante integración.

(d) Calcule el valor de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

3. Pruebe que la función $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ está bien definida en todo $x \in \mathbb{R}$ y que satisface $f''(x) + \dfrac{f'(x)}{x} + f(x) = 0$ para todo $x \neq 0$

4. Sea $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias cuyos coeficientes están determinados por las igualdades $a_0 = a_1 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Muestre que el radio de convergencia de esta serie es igual a $(-1+\sqrt{5})/2$.

5. Aplicando diferenciación e integración término a término, encuentre las siguientes sumas en función de x.

(a) $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + \dfrac{x^n}{n} + ...$

(b) $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...$

(c) $1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n + ...$

(d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + ... + n(n-1)x^{n-1} + ...$