

Curso: Cálculo II

Profesora: Verónica Poblete

Ayudantes: Fabián Hidalgo, Sebastián Rivera

Ayudantía 17 - Sucesiones de Funciones II

Viernes 03 de Noviembre del 2017

Resumen

■ **1. Definición (Conjunto Compacto):**

Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

■ **2. Teorema (de Dini):**

Sea $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones que converge monótonamente a una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ en un conjunto compacto X . Entonces la convergencia de f_n a f es uniforme.

■ **3. Teorema (Continuidad del límite uniforme de funciones continuas):**

Sea $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Si todas las f_n son continuas en un punto $a \in X$, entonces f es continua en $a \in X$.

■ **4. Teorema (Integral del límite uniforme de funciones integrables):**

Sea $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si todas las f_n son integrables, entonces f es integrable, y además se cumple que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

■ **5. Teorema**

(Derivación término a término de una sucesión de funciones de clase C^1):

Sea $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones de clase C^1 . Si para un cierto $c \in [a, b]$ la sucesión $(f_n(c))$ converge, y si la sucesión de derivadas (f'_n) converge uniformemente a una función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces (f_n) converge uniformemente a una función f de clase C^1 en $[a, b]$ tal que $f' = g$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)'$

Guía de Problemas 17

1. Sea $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones tal que solo una cantidad finita de ellas son discontinuas en un punto $a \in X$. Demuestre que el Teorema 3 sigue siendo válido. Enuncie y demuestre el análogo para los Teoremas 4 y 5.
2. Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio no constante. Demuestre que la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = p(x) + 1/n$ converge uniformemente a p en $\mathbb{R}$, y que (f_n^2) no converge uniformemente a p^2 .
3. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f_n(x) = \begin{cases} 1 - 2nx & \text{si } 0 \leq x < 1/2n \\ 0 & \text{si } 1/2n \leq x \leq 1 \end{cases}$
 - (a) Demuestre que f_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Demuestre que (f_n) es monótona decreciente.
 - (c) Demuestre que (f_n) converge puntualmente (monótonamente) y determine la función límite.
 - (d) ¿Puede usar el Teorema de Dini? Decida si la continuidad es uniforme.
4. Sean (f_n) y (g_n) sucesiones de funciones real-valuadas de dominio común X . Pruebe que si $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$ uniformemente en X , entonces:
 - (a) $(\forall a \in \mathbb{R}) af_n \rightarrow af$ uniformemente en X .
 - (b) $f_n \pm g_n \rightarrow f \pm g$ uniformemente en X .
 - (c) Si f y g son funciones acotadas, entonces $f_n \cdot g_n \rightarrow fg$ uniformemente en X .
 - (d) Si f no es acotada, entonces no necesariamente $f_n \cdot g_n \rightarrow fg$ uniformemente en X .
 - (e) Si existe $c > 0$ tal que $|g| \geq c$, entonces $1/g_n \rightarrow 1/g$ uniformemente en X .
5. Sea $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Pruebe que
 - (a) (f_n) converge puntualmente. Determine la función límite f .
 - (b) La convergencia de (f_n) a f no es uniforme.
 - (c) Aún así, la integral del límite es igual al límite de la integral.
6. Sea $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$. Pruebe que
 - (a) (f_n) converge puntualmente a una función f . Determine f .
 - (b) La convergencia de (f_n) a f es uniforme.
 - (c) (f'_n) no converge en ningún punto del intervalo $[0, 1]$.