Cuarta Guía de Ejercicios

Álgebra Lineal. Segundo semestre 2017

1. Sean V y W espacios vectoriales y U un subespacio de V. Demuestre que para toda función lineal $R \in Hom(U, W)$ existe algún $T \in Hom(V, W)$ tal que $T(u) = R(u)$ para todo $u \in U$. ¿Es tal T única?

2. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $T \in Hom(V, \mathbb{K}) \equiv V'$. Pruebe que si $v \in V$ y $v \notin Ker(T)$ entonces $V = Ker(T) \oplus \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

3. Sea V un espacio vectorial y $S, T \in End(V)$. Demuestre que $S \circ T$ es invertible si y solo si ambos S y T son invertibles.

4. Muestre que loe espacios vectoriales V y $Hom(\mathbb{K}, V)$ son isomorfos.

5. Sea V un espacio vectorial y $T \in End(V)$. Muestre que T es un multiplo de la función identidad (e.d. $T = \lambda Id$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$), si y solo si $TS = ST$ para todo $S \in End(V)$.

6. Sea V un espacio vectorial y $S, T \in End(V)$ tal que $ST = TS$. Pruebe que para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ el subespacio $Ker(T - \lambda I)$ de V es S-invariante.

7. Sean V, W dos subespacios del espacio vectorial U tal que $W \subset V$. Muestre que $(U/V)/(V/W)$ y U/W son isomorfos.

8. Supongamos que el espacio vectorial V se escribe como suma directa de dos subespacios: $V = W_1 \oplus W_2$. Encuentre una relación entre V/W_1 y W_2.

9. En los siguientes casos tenemos tres funciones $D : \mathbb{M}(3, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Determine cuales de estas son funciones 3-lineal.

$$D(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}; \quad D(A) = a_{11}^2 + 3a_{11}a_{22}; \quad D(A) = a_{11}a_{22}a_{33},$$

donde $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}(3, \mathbb{R})$.