

seguro no recuerden la extensión del SSH a 2D

①

$$\text{sea } \mathcal{H} = \begin{pmatrix} -2t \cos k_x - 2t \cos k_y - \mu & \Delta (\sin k_x - i \sin k_y) \\ \Delta (\sin k_x + i \sin k_y) & 2t (\cos k_x + \cos k_y) + \mu \end{pmatrix}$$

que tiene que ver con el grafeno?

Nada ... y todo, mejor sigamos adelante.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_x \sigma_x + \mathcal{H}_y \sigma_y + \mathcal{H}_z \sigma_z$$

$$\mathcal{H}_x = \Delta \sin(k_x)$$

$$\mathcal{H}_y = \Delta \sin(k_y)$$

$$\mathcal{H}_z = -2t \cos k_x - 2t \cos k_y - \mu$$

} esto es como el grafeno:

buscamos cosas generales, tan generales que solo dependen del álgebra empleada y no de detalles

diagonalizamos $\mathcal{H} = \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\sigma} \Rightarrow \mathcal{H}^2 = |\vec{\mathcal{H}}|^2$

(2)

$$\Rightarrow E_{\pm} = \pm \sqrt{\mathcal{H}_x^2 + \mathcal{H}_y^2 + \mathcal{H}_z^2}$$

hay gap? Si olvidamos $\mathcal{H}_z$ la respuesta es No

(¿porqué?)

Piénselo ...

(si ya para siges leyendo)

simetría quiral con el mismo hopping $\Rightarrow$ metálicas

(recuerda la cen. de Dirac con $m(x) = \begin{cases} -m, & x < 0 \\ +m, & x > 0 \end{cases}$?)

es decir si no existe $\mathcal{H}_z$ debe existir un punto (al menos)

$$\text{con } \mathcal{H}_x = \mathcal{H}_y(k) = 0$$

los valores propios de $\mathcal{H} = \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$ son (wikipedia)

(3)

$$u_+ = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \gamma_3 + |\vec{\gamma}| \\ \gamma_1 + i\gamma_2 \end{pmatrix}, u_- = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} i\gamma_2 - \gamma_1 \\ \gamma_3 + |\vec{\gamma}| \end{pmatrix}$$

quedamos con u_- :

el punto $k_x = k_y = 0$ es especial ahí:

$$\mathcal{H}_x(0,0) = \Delta \sin(0) = 0$$

$$\mathcal{H}_y(0,0) = \Delta \sin(0) = 0$$

$$\mathcal{H}_z(0,0) = -2t \cos(0) - 2t \cos(0) - \mu = -4t - \mu < 0 \text{ (digamos que } t, \mu > 0)$$

$$\therefore u_-(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_z + |\vec{\gamma}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_z + |\gamma_z| \end{pmatrix}$$

$$\text{como } \gamma_z < 0 \Rightarrow u_-(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ |\gamma_z| - \gamma_z \end{pmatrix} = 0!$$

se nos derrumbó la máxima cuántica!

(4)

pero nos acordamos del ~~anillo~~ de los clases de la simetría de gauge $U(1)$

Podemos realizar:

$$U'(\vec{k}) = U(\vec{k}) e^{i\phi(\vec{k})}$$

$$A'(\vec{k}) = \vec{A}(\vec{k}) + \nabla_{\vec{k}} \phi(\vec{k}) \rightarrow \text{potencial vector de Berry}$$

¿Porque esto nos arregló la situación de $U(0)=0$?

Hint: recuerda los monopolos magnéticos

... es imposible tener un potencial vector que no sea singular en alguna parte de una superficie cerrada (si hay un monopolo).

Solución tener 2 potenciales vector.

Recuerden que la analogía es completa, la superficie de $\vec{k}$ es cerrada y $\vec{A}$ de Berry
transforma como un potencial vector.

Hagámoslo:

$$u_-(k) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} i\gamma_y - \gamma_x \\ \gamma_z + |\vec{\gamma}| \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{la parte de arriba invita a multiplicar por } (i\gamma_y - \gamma_x)^* \\ \text{y la de abajo } (\gamma_z - |\gamma|) \end{array} \right)$$

$$u_-(k) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} (i\gamma_y - \gamma_x) \frac{(-i\gamma_y - \gamma_x)}{(\gamma_z + |\vec{\gamma}|)} \\ (\gamma_z + |\vec{\gamma}|) \frac{(-i\gamma_y - \gamma_x)}{(\gamma_z - |\vec{\gamma}|)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}{(\gamma_z + |\vec{\gamma}|)} \\ -\gamma_x - i\gamma_y \end{pmatrix} \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \frac{|\vec{\gamma}|^2 - \gamma_z^2}{|\vec{\gamma}| + \gamma_z} \\ -\gamma_x - i\gamma_y \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \gamma_z - |\vec{\gamma}| \\ \gamma_x + i\gamma_y \end{pmatrix}$$

Ahora que tenemos nuestro nuevo vector, calculamos $u'(0,0)$

$$u'(0,0) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \gamma_z - |\gamma_z| \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ recorden } \gamma_z(0) = -q + m < 0$$

por lo que todo funciona con $u_-(0,0)$, tenemos mecánica cuántica.

Pero si recordan la clase del monopolio, al borrar la mujer debajo de la alfombra, esto lo cambiamos de lugar.

Veamos $k=(\pi, \pi)$

$$u_-(\pi, \pi) = \frac{1}{v_1} \begin{pmatrix} \chi_z - |\vec{\chi}_z| \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \chi_z = 4t - \mu$$

si $\chi_z > 0$, $u_-(\pi, \pi) = 0$

es decir con $4t > \mu$ tendremos una singularidad siempre
(note que ~~el caso~~ $u_-(\pi, \pi)$ es regular)

Calculamos la fase de Berry encerrada:

$$\gamma = 2\pi \hat{C} \overset{\text{numero de Chern}}{\uparrow} = \oint_{B^2} dk \Omega = \int_0^{2\pi} dk_x \int_0^{2\pi} dk_y \nabla \times \vec{A} \overset{\text{STOKES}}{\uparrow} = \oint_{\partial D_1} d\vec{k} \vec{A}^{(1)} + \oint_{\partial D_2} d\vec{k} \vec{A}^{(2)} = \oint_{\partial D_1} d\vec{k} (\vec{A}^{(1)}(k) - \vec{A}^{(2)}(k))$$

(7)

$$= \oint_{\partial D_1} d\vec{k} \cdot \nabla \phi(k)$$

debemos elegir ∂D_1 y calcular $\phi(k)$

elijamos un pequeño círculo ∂D_1 en torno al origen.

Nuestra fase de gauge es:

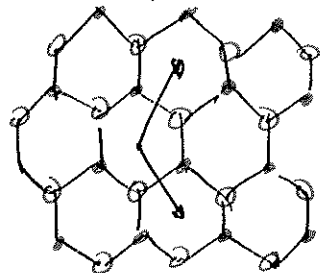
$$\frac{+i\gamma_y + \gamma_x}{|\vec{\gamma}| + \gamma_z} = e^{i\phi(k)} = \frac{\gamma_x + i\gamma_y}{|\gamma_x + i\gamma_y|} \cdot \frac{|\vec{\gamma}| + \gamma_z}{|\vec{\gamma}| + \gamma_z} \stackrel{k \rightarrow 0}{=} \frac{\Delta \gamma_x(k_x) + i\Delta \gamma_x(k_y)}{|\Delta \gamma_x(k_x) + i\Delta \gamma_x(k_y)|} = \frac{k_x + i k_y}{|\vec{k}|} = e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \phi(k) = \theta(k)$$

$$\Rightarrow \gamma = \oint d\vec{k} \cdot \nabla \vec{A}(\vec{k}) = \int_0^{2\pi} d\theta = \theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi \Rightarrow \boxed{C=1}$$

el número de Chern es no-trivial

Unos de grafeno



$$V(\vec{r}) = V(\vec{r} + M\vec{Q}_1 + N\vec{Q}_2)$$

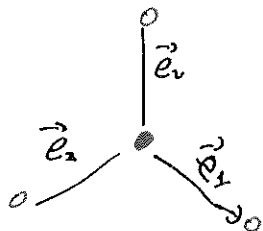
$$\vec{Q}_1 = a \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\vec{Q}_2 = a \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

"a" es la distancia entre centros de hexágonos.

Si "d" es la distancia entre átomos $\Rightarrow a = \sqrt{3}d$

cada carbon tiene 3 primeros vecinos



en el plano complejo

$$\vec{Q}_2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} = i = \left(0, \frac{a}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\vec{Q}_3 = i e^{i\frac{2\pi}{3}} = i \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{Q}_1 = i e^{i\frac{4\pi}{3}} = i \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \frac{a}{\sqrt{3}}$$

(en el último paso los escalo a la distancia correcta)

$$H_{NN} = -t \sum_i a_i^\dagger b_{i+\vec{Q}_1} + a_{i+\vec{Q}_1}^\dagger b_i + a_{i+\vec{Q}_2}^\dagger b_i + a_i^\dagger b_{i+\vec{Q}_2} + \text{h.c.}$$

Fourier:

$$a_{r_i}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} \quad \Bigg| \quad a_{r_i} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i}$$

$$a_{r_i}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} \quad \Bigg| \quad a_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r_i} a_{r_i} e^{+i\vec{k} \cdot \vec{r}_i}$$

(9)

$$\begin{aligned}
 \sum_i a_{r_i} b_{r_i} \vec{e}_i &= \sum_i \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}'} b_{\vec{k}'} e^{-i\vec{k}' \cdot (\vec{r}_i + \vec{e}_i)} \right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{e}_i} a_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}'} \underbrace{\sum_{\vec{r}_i} e^{i\vec{r}_i \cdot (\vec{k} - \vec{k}')} }_{N \delta(\vec{k} - \vec{k}')} = \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{e}_i} a_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore H = -t \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} (e^{-i\vec{k} \cdot \vec{e}_1} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{e}_2} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{e}_3}) + h.c.$$

$$H = \sum_{\vec{k}} \begin{pmatrix} a_{\vec{k}}^+ & b_{\vec{k}}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{k}} \\ b_{\vec{k}} \end{pmatrix}$$

$$\text{where } \gamma_{12} = -t (e^{-i\vec{k} \cdot \vec{e}_1} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{e}_2} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{e}_3}), \quad \gamma_{21} = \gamma_{12}^*$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = 0$$

$$E_{\pm} = \pm |\psi_n(\vec{k})|$$

$$= \pm \sqrt{3+4 a^2 \left(\frac{k_x a}{2} - \frac{\sqrt{3} a k_y}{2} \right) + 2 a^2 (k_x a)}$$

busquemos $E_{\pm} = 0$

si hacemos $k_y = 0$:

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{3+4 a^2 \left(\frac{k_x a}{2} \right) + 2 a^2 (k_x a)} = 0$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{-\frac{1}{2}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{a k_x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow K = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3a} \right)$$

$\uparrow$
K

$E_{\pm}(K) = 0$ y además tiene

simetría triangular

$$E\left(R\left(\frac{2\pi}{3}\right)K\right) = E\left(R\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 K\right) = 0$$

Red recíproca

(10)

$\vec{F} = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 \rightarrow$ red periódica

$\vec{k} = M\vec{k}_1 + N\vec{k}_2$? existe?

Si y además puede exigir

$$\vec{a}_i \cdot \vec{k}_j = 2\pi \delta_{ij} \quad \left. \begin{array}{l} \text{(para los } e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}) \\ \text{(para simplificarlos)} \end{array} \right\}$$

tenemos:

$$\vec{k}_1 = \frac{2\pi(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}{\vec{a}_1(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)} \quad \text{y análogos}$$

$$\vec{a}_1 = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a, 0 \right)$$

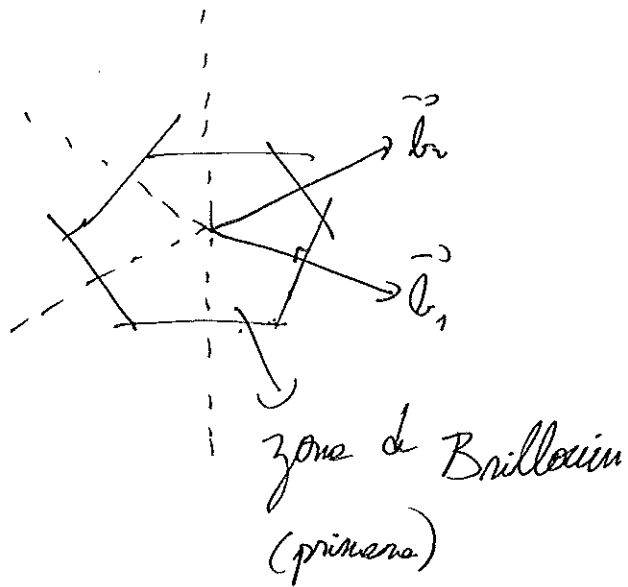
$$\vec{a}_2 = \left(\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0 \right)$$

$$\vec{a}_3 = (0, 0, c) \rightarrow \text{para los } \vec{k}_i$$

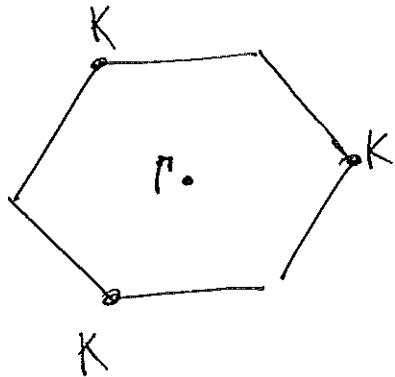
$$\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{a} \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$$

$$\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{a} \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$$

$$\vec{k}_3 = \frac{2\pi}{c} (0, 0, 1)$$



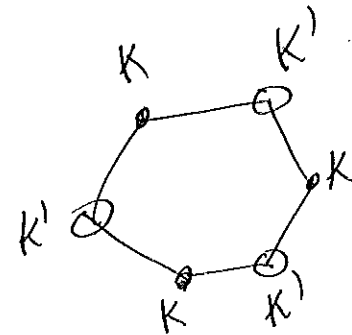
dominos básicos de Fourier simetrizados



$$K = \frac{1}{3}\vec{b}_1 + \frac{1}{3}\vec{b}_2 + \frac{1}{3}\vec{b}_1 + \frac{1}{3}\vec{b}_2$$

que pase con los demás vertices?

(11)



no están conectados por vectores. Pasa

pero si nos paramos al centro del hexágono tenemos que

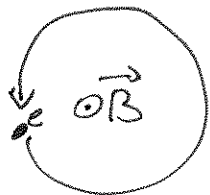
$\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ (que viene de $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$) permite conectar

K con K' . Este es la simetría de inversión

$$\therefore E(K) = E(K') = 0$$

Que pasa con un campo magnetico?

Aharonov-Bohm

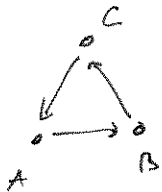


el electron cambia de fase

$$\phi = \frac{e}{\hbar} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{e}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

en una red



$$\phi = \frac{e}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \phi_{AB} + \phi_{BC} + \phi_{CA}$$

$$\phi_{AB} = \frac{e}{\hbar} \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\phi'_{AB} = \frac{e}{\hbar} \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{e}{\hbar} \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{l} + \nabla \chi \cdot d\vec{l} = \phi_{AB} + (\chi_B - \chi_A) \frac{e}{\hbar}$$

no es invariante de gauge

pero sobre una curva cerrada

(12)

$$\phi_{AB} + \phi_{BC} + \phi_{CA} = \phi'_{AB} + \phi'_{BC} + \phi'_{CA}$$

en un tight binding es natural introducir las fases en los hoppings

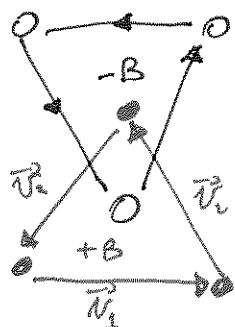
$$t \rightarrow t e^{i\phi_{AB}}$$

$$t_{AB} t_{BC} t_{CA} = |t_{AB}| |t_{BC}| |t_{CA}| e^{i\phi_{AB} + i\phi_{BC} + i\phi_{CA}}$$

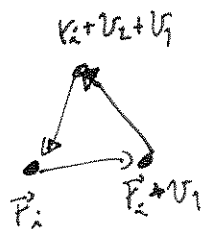
$$\text{con } t_{AB} = t_{BA}^* \text{ (hermitas)}$$

$$\text{pero } (t_{AB} \neq t_{BA})$$

a Holstone se le ocurre un hopping a 2 vecinos (NN)
complex y distintos para cada subred



los vectores que describen un loop son
 $\vec{v}_1 = (a, 0)$, $\vec{v}_2 = (-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2})$, $\vec{v}_3 = (-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2})$



$$H_{NN} = -t \left(\sum_{i,j} a_i^\dagger b_j \right) + \text{hc.} \quad (\text{graphene})$$

$$H_{NNN} = -t e^{i\phi} \left(\sum_i a_i^\dagger a_{i+v_1} + a_{i+v_2}^\dagger a_{i+v_1+v_2} + a_{i+v_1+v_2}^\dagger a_i \right) \\ - t e^{-i\phi} \left(\sum_i b_i^\dagger b_{i+v_1} + b_{i+v_1}^\dagger b_{i-v_3} + b_{i-v_3}^\dagger b_{i+v_2} \right) + \text{hc.}$$

Fourier:

$$H_{NNN} = -t e^{i\phi} \sum_k a_k^\dagger a_k \left(e^{i\vec{k} \cdot \vec{v}_1} + e^{i\vec{k} \cdot \vec{v}_2} + e^{i\vec{k} \cdot \vec{v}_3} \right) \\ - t e^{-i\phi} \sum_k b_k^\dagger b_k \left(e^{i\vec{k} \cdot \vec{v}_1} + e^{i\vec{k} \cdot \vec{v}_2} + e^{i\vec{k} \cdot \vec{v}_3} \right) + \text{hc.}$$

$$= -2t \sum_k a_k^\dagger a_k \left[\cos(\vec{k} \cdot \vec{v}_1 + \phi) + \cos(\vec{k} \cdot \vec{v}_2 + \phi) + \cos(\vec{k} \cdot \vec{v}_3 + \phi) \right] \\ - 2t \sum_k b_k^\dagger b_k \left[\cos(\vec{k} \cdot \vec{v}_1 - \phi) + \cos(\vec{k} \cdot \vec{v}_2 - \phi) + \cos(\vec{k} \cdot \vec{v}_3 - \phi) \right]$$

el objetivo es dejar $H_{\mu\nu}$ como

$$H_{\mu\nu} = \sum_k (a_k^+ b_k^+) \eta_{\mu\nu} (a_k b_k)$$

$$\text{con } \eta_{\mu\nu} = \vec{J}_0 \cdot \vec{1}_{\mu\nu} + \vec{J} \cdot \vec{P}$$

un poco más de álgebra

$$H_{\mu\nu} = -2t$$

$$H_{\mu\nu} = \sum_k -2t a_k^+ a_k \left(\cos k v_1 \cos \phi + \cos k v_2 \cos \phi + \cos k v_3 \cos \phi \right. \\ \left. - \sin k v_1 \sin \phi - \sin k v_2 \sin \phi - \sin k v_3 \sin \phi \right)$$

+ ...

reconocemos que

$$d_0 = -2t (\cos k v_1 + \cos k v_2 + \cos k v_3) \cos \phi$$

$$\vec{J}_0 \cdot \vec{d} = -2t (\sin k v_1 + \sin k v_2 + \sin k v_3) \sin \phi$$

sin $H_{\mu\nu}$

$$E_{\pm}(K) = 0,$$

$$\text{ahora tenemos que } (E_+ - E_-)|_K = 6t' \sin(\phi) \sqrt{3}$$

$$\text{pero } d_z(K) = 3\sqrt{3} t' \sin \phi$$

$$\gamma \quad d_z(K') = d_z(-K) = -3\sqrt{3} t' \sin \phi$$

el signo de d_z cambia con cada valle, K, K' !

recuerden la discusión de la solución del $\mathcal{H}$ de 2x2. páginas ①-⑦.

Aquí ocurre exactamente lo mismo. necesitamos

2 gauges para un η_z que cambie de signo
(cuando d_x, d_y se indefinan)

∴ el Chern number es ± 1

comparamos la simetría de inversión
(grámetrica quiral) de otra forma:

$$H_{\text{pot}} = V \sum_k a_k^+ a_k - V \sum_k b_k^+ b_k$$
$$= \sum_k \begin{pmatrix} a_k^+ & b_k^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & -V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$\therefore d\tau = V \quad \forall \vec{k}$$

Como $d\tau$ no cambia de signo,
un gauge baste γ es trivial