Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Grupos y Anillos

Control 3

1. Sea $R \times S$ el producto de dos anillos conmutativos unitarios. Muestre que todo ideal de este producto es de la forma $I \times J$, donde I y J son ideales de R y S respectivamente.
2. Sean R y S dos anillos no triviales. Muestre que $R \times S$ no es un dominio de integridad.
3. Sea $I = \langle x \rangle$ ideal de $R[x]$. Pruebe que I es un ideal primo si y sólo si R es un dominio de integridad y que I es maximal si y sólo si R es un cuerpo.
4. Muestre que si R es un DIP e I es un ideal de R, entonces todo ideal de R/I es un ideal principal.
5. Sean A un DIP y p, q elementos primos en A tales que $p \mid q$. Muestre entonces que p y q difieren en una unidad.
6. Encuentre en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ un ideal primo que no sea maximal.
7. Sea $A = \mathbb{Z}[x]$. Muestre que el ideal $\langle 2, x \rangle \subset A$ no es principal.
8. Muestre que todo dominio de integridad finito es un cuerpo.
9. Sea A anillo conmutativo unitario y sea $\mathfrak{N}(A)$ su nilradical. Muestre que $A/\mathfrak{N}(A)$ no tiene elementos nilpotentes.
10. Sea $f : A \to B$ un homomorfismo epiyectivo de anillos unitarios y sean $J(A)$ y $J(B)$ el radical de Jacobson de A y B respectivamente. Muestre que $f(J(A)) \subset J(B)$.
11. Sea $P = x^2 - 7x + 12$. Muestre que $\mathbb{Z}[x]/\langle P \rangle \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
12. Demuestre que $(\mathbb{Z}/143\mathbb{Z})^*$ no es un grupo cíclico.
13. Muestre que todo subcuerpo de $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$.
14. Muestre que $Q(\mathbb{Z}[i]) = \mathbb{Q}[i]$.
15. Encuentre un máximo común divisor y un mínimo común múltiplo para $4 + 2i$ y $7 + i$ en $\mathbb{Z}[i]$.