Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Grupos y Anillos

Algunos ejercicios resueltos

Frederick Silva Toro

1. Sea G un grupo y $K \lhd G$ es cíclico. Muestre que cada subgrupo de K es normal en G.

   Sea $K = \langle k \rangle$ y sea $g \in G$, luego, como K normal en G, tenemos que $ghg^{-1} = h^j$ para algún $j \geq 0$. Sea $H < K$, por lo que existe $i \geq 0$ tal que $H = \langle h^i \rangle$, por lo que si $g \in G$, entonces $gh^i g^{-1} = h^{i \cdot j} \in H$. Concluímos $H \lhd G$.

2. Pruebe que todo grupo de orden 15 es abeliano. ¿Es cíclico?

   Sea G grupo de orden $15 = 3 \cdot 5$. El teorema de Sylow nos dice que $n_5 \equiv 1(5)$ y $n_5 | 3$, luego $n_5 = 1$, además $n_3 \equiv 1(3)$ y $n_3 | 5$, por lo que $n_3 = 1$. Sean H, K el 5 y 3- Sylow respectivamente. Digamos $H = \langle h \rangle$ y $K = \langle k \rangle$, cíclicos pues tienen orden primo. Consideremos el elemento $hk \in G$. Este elemento tiene orden 15, luego no hay más opción para G que ser grupo cíclico de orden 15. (h y k conmutan por tener ordenes relativamente primos.)

3. Pruebe que no hay grupos simples de orden 36.

   Sea G grupo de orden $36 = 2^2 3^2$. El teorema de Sylow nos dice que existe $H < G$ con $|H| = 9$. Tenemos que G actúa no trivialmente por multiplicación por la izquierda en el conjunto de clases laterales G/H, luego tenemos $\varphi : G \longrightarrow Biy(G/H) \cong S_4$ homomorfismo de grupos no trivial (el último isomorfismo sigue del hecho que $[G : H] = 4$, y al ser no trivial decimos que $\ker \varphi \neq G$). Ahora, si suponemos G simple, entonces $\ker \varphi = \{e\}$ (los núcleos de los homomorfismos son subgrupos normales del grupo), es decir, φ inyectiva, en particular $|\varphi(G)| = |G|$ (también podemos argumentar con primer teorema de isomorfía), además $36 = |\varphi(G)| \mid |S_4| = 24$, lo cual es una contradicción. Concluímos que G no puede ser simple.

4. Pruebe que $G_2 \rtimes_\varphi G_1$ es abeliano si y solo si G_1 y G_2 son abelianos y $\varphi(a_1) = id_{G_2}, \forall a_1 \in G_1$.

   En una dirección, si φ trivial, entonces el producto semidirecto es simplemente el producto directo, y si G_1 y G_2 son abelianos, también lo es su producto directo $G = G_2 \rtimes_\varphi G_1$.

En la otra dirección, supongamos $G_2 \rtimes_\varphi G_1$ abeliano. Como $G_1, G_2 < G_2 \rtimes_\varphi G_1$ (en realidad son isomorfos a subgrupos del semidirecto, pero se entiende) entonces también son abelianos. Como todos los elementos conmutan, en particular $(e_2, g_1)(g_2, e_1) = (g_2, e_1)(e_2, g_1) \forall g_1 \in G_1, \forall g_2 \in G_2$, luego $(g_2, g_1) = (\varphi_{g_1}(g2), g_1)$ ssi $g_2 = \varphi_{g_1}(g_2), \forall g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$, es decir φ es trivial.

5. Sean $\varphi : G_1 \longrightarrow Aut(G_2)$ un homomorfismo de grupos. Identifique G_1 y G_2 en $G = G_2 \rtimes_\varphi G_1$.

   (a) Pruebe que $C_{G_1}(G_2) = ker(\varphi)$, donde $C_{G_1}(G_2) = C_G(G_2) \cap G_1$.

   (b) Pruebe que $C_G(G_1) \cap G_2 = N_G(G_1) \cap G_2$.

   Sea $g \in C_G(G_2) \cap G_1$ ssi $g = (e_2, g_1)$ para algún $g_1 \in G_1$ y $(e_2, g_1)(g_2, e_1) = (g_2, e_1)(e_2, g_1) \forall g_2 \in G_2$ ssi $\varphi_{g_1}(g_2) = g_2, \forall g_2 \in G_2$ ssi $g_1 \in \ker \varphi$.

   Sea $g \in N_G(G_1) \cap G_2$ ssi $g = (g_2, e_1)$ y $\forall g_1 \in G_1$ existe $g_1' \in G_1$ tal que $(g_2, e_1)(e_2, g_1)(g_2^{-1}, e_1) = (e_2, g_1') \forall g_1 \in G_1$ ssi $g_1 = g_1'$ y $g_2 \varphi_{g_1}(g_2^{-1}) = e_2$ ssi $g_2 = g_1 g_2 g_1^{-1} \forall g_1 \in G_1$ y $g_1 = g_1'$ ssi $g_2 \in C_G(g_1) \cap G_2$.

6. Sea G grupo de orden pq producto de primos distintos. Demuestre que G es soluble.

   Sin perdida de generalidad digamos $p > q$, luego, por teorema de Sylow sabemos que existen subgrupos H, K en G de ordenes p, q respectivamente, además $H \lhd G$. Con esto tenemos que $G = HK$ pues p y q son relativamente primos ($H \cap K = \{e\}$) y por segundo teorema de isomorfia $HK/H \cong H/H \cap K \cong H$ que es abeliano. Luego la cadena $\{e\} \lhd H \lhd G$ sirve para mostrar que G es soluble.

7. Sea G grupo nilpotente. Pruebe que $Z(G) \neq \{e\}$. De un ejemplo de grupo soluble que no sea nilpotente.

   Si Ges grupo nilpotente y supongamos $Z(G) = \{e\}$, entonces su serie central ascendente llega en algún número finito de pasos a G. Vemos que $Z_0(G) = \{e\}$, $Z_1(G) = \pi_0^{-1}(Z(G/Z_0)) = Z(G) = \{e\}$, y es fácil ver que de ahora en adelante $Z_i(G) = \{e\}, \forall i > 0$, pues es el mismo cálculo en cada paso, por lo que la serie central no acaba, lo que contradice que acaba en un número finito de pasos. Notar que S_3 es soluble considerando la cadena $\{e\} \lhd \langle r \rangle \lhd S_3$ y como 3 es impar tenemos que $Z(G) = \{e\}$, y por el resultado anterior, S_3 no es nilpotente.

8. ¿Cuándo un grupo simple es soluble?.

   Sea G grupo simple, luego no tiene subgrupos normales no triviales, por lo que si G es soluble, la única cadena posible corresponde a $\{e\} \lhd G$ donde además $G/\{e\} \cong G$ es abeliano. Este grupo abeliano debe tener orden primo, de lo contrario, por teorema de Cauchy, existirían subgrupos no triviales (normales por abelianidad). Concluímos $G \cong C_p$ con p primo.

9. Sea $G = PQ$ grupo donde P y Q son subgrupos abelianos de G y $P \lhd G$. Muestre que G es soluble.

   Si P es normal en G sabemos lo siguiente (segundo teorema de isomorfía); $P \lhd PQ, P \cap Q \lhd Q$ y $PQ/P \cong Q/P \cap Q$. Dicho esto consideramos la cadena $\{e\} \lhd P \lhd PQ = G$. $P/\{e\} \cong P$ es abeliano y $PQ/P \cong Q/P \cap Q$ es abeliano pues Q lo es y cualquier cociente por un subgrupo de el también lo es. Con esto G es soluble.

10. Sea $G = \langle a, b \mid a^4 = b^3 = e,\ aba^{-1} = b^{-1} \rangle$. ¿Es G soluble?. ¿Es nilpotente?. (Al vuelo,¿ es este grupo un producto semi directo?¿Cuál?)

    Basta notar que $B = \langle b \rangle$ es subgrupo normal de G, y además B abeliano (es cíclico); si $g \in G$ y $b \in B$ entonces $g = a^i b^j$ y tenemos que $gbg^{-1} = a^i b^j b b^{-j} a^{-i} = a^i b a^{-i} = b^{-j} \in B$. G soluble pues la cadena $\{e\} \lhd B \lhd G$ es tal que $B/\{e\} \cong B$ es abeliano y G/B abeliano (es un grupo de orden p^2 con $p = 2$). Todo lo anterior es justificable pues $G \cong B \ltimes_\varphi A \cong C_4 \ltimes_\varphi C_3$ donde $\varphi(1) = 2$. G no es nilpotente pues $Z(G) = \{e\}$; $g = a^i b^j \in Z(G)$, luego, en particular $b = gbg^{-1} = a^i b^j b b^{-j} a^{-i} = b^{-j}$ para todo $b \in B$ lo cualsucede solo para $j = 0$, por lo que $g = a^i$ que por la relaión del grupo conmuta con b solo si $i = 0$.

11. Muestre que S_4 es soluble.

    Considere $\{e\} \lhd K \lhd A_4 \lhd S_4$, donde $K = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ el grupo de Klein. notar que todos los cocientes son abelianos (basta ver sus ordenes).

12. Encuentre los n para los cuales D_{2n} es nilpotente.

    Afirmación: D_{2n} nilpotente ssi $n = 2^i$ para algún $i \geq 0$. Recordar que $D_{2n} = \langle r, s \mid r^n = s^2 = e,\ sr = r^{-1}s \rangle$. En una dirección, supongamos D_{2n} nilpotente, y supongamos también que existe p primo impar tal que $p \mid n$, luego el elemento $r^{n/p}$ tiene orden p, y este al ser distinto del primo 2, tenemos que $r^{n/p} \neq r^{-n/p}$. Como $|s| = 2$ es relativamente primo a $|r^{n/p}| = p$ ambos elementos conmutan, es decir $sr^{n/p} = r^{n/p}s$, lo que contradice la relación definida del diedral. Supongamos ahora que $n = 2^k$. Mostraremos por inducción sobre k que D_{2n} es nilpotente. Si $k = 0$ entonces $D_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que es nilpotente. Suponemos que $D_{2 \cdot 2^k}$ es nilpotente. Vemos entonces $D_{2 \cdot 2^{k+1}}$. Sabemos que $Z(D_{2 \cdot 2^{k+1}}) = \left\langle r^{2^k} \right\rangle$, por lo que $D_{2 \cdot 2^{k+1}}/Z(D_{2 \cdot 2^{k+1}}) \cong D_{2 \cdot 2^k}$, donde $Z(D_{2 \cdot 2^{k+1}}) = \left\langle r^{2^k} \right\rangle$ (el giro en π). Ahora, extensión de nilpotentes es nilpotente (los centros son nilpotentes por ser abelianos, y el cociente es nilpotente por hipótesis inductiva.). Así concluímos $D_{2 \cdot 2^{k+1}}$ es nilpotente.