GUÍA DE EJERCICIOS (DIFERENCIABILIDAD)

CÁLCULO III (OTOÑO 2017)

1.- Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = \ln(y + \sqrt{x^2+y^2})$.

ii) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

iii) $f(x,y) = \arcsin(x/y)$.

iv) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-xy}$.

v) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

2.- Considere la función

$$f(x,y) = x^2y^2 - \ln(x^2+y^2)$$

y determine si satisface o no la ecuación en derivadas parciales:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x^2y^2 - 2$$

3.- Considere la función

$$f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$$

y determine si satisface o no la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$$

4.- Considere la función

$$f(x,y) = e^{\frac{y}{x}}$$

y determine si satisface o no la ecuación en derivadas parciales:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

5.- Para cada una de las funciones. Escriba la expresión del residuo de la definición de diferenciabilidad en el punto en cuestión. Demuestre que la función es diferenciable.

5.1) $f(x,y) = 4x - 10y$ en (x_0,y_0) arbitrario.

5.2) $f(x,y) = 4x^2y^3$ en $(x_0,y_0) = (1,1)$.

5.3) $f(x,y) = x\sin(y)$ en $(x_0,y_0) = (0,0)$.

5.4) $f(x,y) = x^2 - y^2$ en (x_0,y_0) arbitrario.

6.- Demuestre que la función $f(x,y) = |x| + |y|$ no es diferenciable en el origen. Ayuda: use la definición de derivada parcial para ver si existen las derivadas parciales en $(0,0)$.

7.- Demuestre que las siguientes funciones son diferenciables en todo su dominio:

7.1) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$.

7.2) $f(x,y) = 4\sin(e^{xy})$.

7.3) $f(x,y) = \frac{1+\tanh(x)}{\cosh(y)}$.

7.4) $f(x,y) = e^{\sin(xy)+y^2}$.

8.- Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbb{R}$. Calcule las derivadas parciales de la siguientes funciones:

8.1) $f(x,y) = 4g(x) + 7g(y)$.

8.2) $f(x,y) = xyg(x)g(y)$.

8.3) $f(x,y) = g(x)g(y) - g^2(x)$.

8.4) $f(x,y) = g(g(x)) + g(g(y))$.

9.- Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

no existe. Puede f ser diferenciable en (x_0, y_0)?.

10.- Verifique que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$ pero no es diferenciable en $(0,0)$.

11.- Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ no es diferenciable en $(0,0)$.

12.- Considere la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(u) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad u \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

y defina la función

$$f(x,y) = x^2 g(x) + y^2 g(y).$$

Demuestre que f es derivable en $(0,0)$. Existen las derivadas parciales en alguna vecindad de $(0,0)$?

13.- Considere la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy = 0 \\ 1 & \text{si} \quad xy \neq 0 \end{cases}$$

Existen las derivadas parciales en $(0,0)$

14.- La siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

se denomina *Ecuación de Laplace* y ocupa un lugar ilustre en las ciencias. Determine cuales de las siguientes funciones es solución de la ecuación de Laplace:

14.1) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

14.2) $f(x,y) = e^x(\cos(y) + \sin(y))$.

14.3) $f(x,y) = e^x(x\cos(y) - y\cos(y))$.

14.4) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + \sin(2xy))$.

14.5) $f(x,y) = \ln(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$.

15.- La ecuación del calor está definida por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

determine si $u(x,t)=(x-at)^2+(x+at)^2$ es solución de la ecuación del calor.

16.- Considere la función $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ y determine si es diferenciable en $(0,0)$.

17.- Averigue si la función $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$ pero no es diferenciable en $(0,0)$.

18.- Compruebe que la función $z\colon \mathbb{R}^2\colon \mathbb{R}$ definida por:

$$z(x,y)=x^n f\big(\frac{y}{x^2}\big)$$

donde $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función diferenciable arbitraria, satisface la ecuación:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+2y\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=nz$$

19.- Compruebe que la función $z\colon \mathbb{R}^2\colon \mathbb{R}$ definida por:

$$z(x,y)=yf\big(x^2-y^2\big)$$

donde $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función diferenciable arbitraria, satisface la ecuación:

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)+xy\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=xz(x,y)$$

20.- Demuestre que la función $u\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por:

$$u(x,y,z)=\frac{C_1e^{-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+C_2e^{a\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

satisface la ecuación de Helmholz:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x,y,z)=a^2u(x,y,z)$$

21.- Sea $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ una función diferenciable en $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$, cuya matriz jacobiana evaluada en $\vec{u}$ es:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1\\ 3 & 2\\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

y sea $\vec{g}\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es una función diferenciable en $\vec{f}(\vec{u})\in\mathbb{R}^3$ cuyo gradiente en $\vec{f}(\vec{u})$ es:

$$\nabla\vec{f}(\vec{u})=(8,0,-2).$$

Calcule el vector gradiente de $(\vec{g}\circ\vec{p})$ en $\vec{u}$.

22.- Sea $\vec{g}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una función diferenciable en $\vec{p}\in\mathbb{R}^2$, cuya matriz jacobiana en $\vec{p}$ es:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2\\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función diferenciable tal que:

$$\nabla(\vec{f}\circ\vec{g})(\vec{p})=(1,1).$$

Calcule el vector gradiente de $\vec{p}$ en $\vec{g}(\vec{p})$.

23.- Sean $\vec{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables tales que $\vec{g}(0) = (0,0,0)$,

$$D\vec{g}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D\vec{f}(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Demuestre que la función compuesta $p = \vec{f} \circ \vec{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica $p'(0)$.

24.- En qué dirección es igual a cero la derivada direccional de

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

en el punto $(1,1)$?.

25.- Hallar la derivada direccional de la función dada en el punto $\vec{p}_0$ y la dirección $\vec{v}$:

25.1) $f(x,y) = e^x \cos(xy)$ con $\vec{p}_0 = (0,0,0)$ y $\vec{v} = (2,1,-2)$.
25.2) $f(x,y) = xy + yz + zx$ con $\vec{p}_0 = (1,1,2)$ y $\vec{v} = (10,-1,2)$.

26.- Sea $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $\vec{f}(0,0) = (0,0)$. Suponga que la matriz jacobiana de $\vec{f}$ en $(0,0)$ es

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sean $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f_2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Determine las matrices jacobianas en $(0,0)$ para las siguientes funciones $\vec{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

26.1) $\vec{F}(x,y) = (x, f_1(x,y))$.
26.2) $\vec{F}(x,y) = (f_2(x,y), y)$.
26.3) $\vec{F}(x,y) = (x^2 f_1(x,y), y^2 f_2(x,y))$.
26.4) $\vec{F}(x,y) = \vec{f}(\vec{f}(\vec{f}(x,y)))$.
26.5) $\vec{F}(x,y) = (f_2(x,y), f_1(x,y))$.
26.6) $\vec{F}(x,y) = (xf_1(x,y) + yf_2(x,y), yf_1(x,y) + xf_2(x,y))$.

27.- Sea $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $\vec{f}(0,0) = (0,0)$. Suponga que la matriz jacobiana de $\vec{f}$ en $(0,0)$ es

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sean $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f_2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Determine las matrices jacobianas en $(0,0)$ para las siguientes funciones $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

27.1) $F(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y)$.
27.2) $F(x,y) = f_1(x,y)f_2(x,y)$.
27.3) $F(x,y) = \sin(f_1(x,y)) + \cos(f_2(x,y))$.
27.4) $F(x,y) = \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} g(s)\,ds$ donde $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $g(0) = 5$.

28.- Sea $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable. Suponga que la matriz jacobiana de $\vec{f}$ en $\vec{p}$ es

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Encuentre la función $\vec{g} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz jacobiana en $\vec{p}$ es:

28.1)
$$\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}.$$
28.2)
$$\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}.$$
28.3)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}.$$
28.4)
$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8c & 8d \end{bmatrix}.$$
28.5)
$$\begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ c-a & d-b \end{bmatrix}.$$

29.- Sea $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable con un punto fijo $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$. Es decir $\vec{f}(\vec{p}) = \vec{p}$. Sea A la matriz jacobiana de $vecf$ evaluada en $\vec{p}$. Determine una función diferenciable $\vec{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz jacobiana evaluada en $\vec{p}$ sea A^k ($\vec{k} \in \mathbb{N}$).

30.- Describa cómo son las funciones diferenciables $\vec{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuya matriz jacobiana es diagonal.

31.- Describa cómo son las funciones diferenciables $\vec{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuya matriz jacobiana es triangular superior.

32.- Describa cómo son las funciones diferenciables $\vec{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cuya matriz jacobiana es triangular inferior.

33.- Si f es una función diferenciable y $u = f(x, y)$ con $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$. Demuestre que:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin(\theta)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos(\theta)$$