

GUÍA DE EJERCICIOS (CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS)

CÁLCULO III (OTOÑO 2017)

- 1.- Demuestre que la unión finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- 2.- Demuestre que la intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
- 3.- Determine si la unión infinita de conjuntos abiertos siempre es un conjunto abierto.
- 4.- Determine si la intersección infinita de conjuntos abiertos siempre es un conjunto abierto.
- 5.- Demuestre que el conjunto

$$A_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0 \text{ y } x_2 < 0\}$$

es abierto en \mathbb{R}^2 .

- 6.- Demuestre que el conjunto

$$A_1 \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \text{ y } x_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

no es abierto en \mathbb{R}^2 .

- 7.- Demuestre que el conjunto

$$A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 2\}$$

es abierto en \mathbb{R}^3 .

- 8.- Sea $O \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y considere los k -vectores:

$$\vec{x}_1 \in O, \quad \vec{x}_2 \in O, \quad \dots, \vec{x}_k \in O.$$

Demuestre que

$$O \setminus \left\{ \bigcup_{i=1}^k \{\vec{x}_i\} \right\}$$

es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n .

- 9.- Demuestre que el conjunto

$$A_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0 \text{ y } x_2 \in \mathbb{R}\}$$

es cerrado en \mathbb{R}^2 .

- 10.- Demuestre que el conjunto

$$A_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2017\}$$

es cerrado en \mathbb{R}^3 .

- 11.- Demuestre que el conjunto

$$B = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 0 < (x^{1892} + y^{1892} + z^{1892} + w^{1892})^{\frac{1}{1892}} < 1\}$$

es abierto en \mathbb{R}^4 .