Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Mecánica Estadística
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Matías Sepúlveda

Guía 1: Repaso Termodinámica

vie. 5 agosto 2016

Tarea: los 5 con asterisco para el vie. 12 agosto.

- Resuelva los problemas del final del Cap. 1 de Kardar. Además dejo los siguientes:

1. * Para un gas ideal monoatómico la ecuación fundamental en representación de entropía es

$$S = Ns_0 + NR\ln\left[\left(\frac{U}{U_0}\right)^{3/2}\left(\frac{V}{V_0}\right)\left(\frac{N}{N_0}\right)^{-5/2}\right],$$

donde s_0, V_0, U_0 y N_0 son constantes, y R es la constante de los gases ideales. Esta relación se conoce con el nombre de "ecuación de Sackur–Tetrode", y con métodos de mecánica estadística es posible evaluar s_0 a partir de constantes fundamentales.

   i) Encuentre la ecuación fundamental en representación de energía. Es decir, escriba U como $U(S,V,N)$.
   ii) Encuentre ecuaciones de estado en representación de entropía y en representación de energía.
   iii) Encuentre la forma de las adiabatas y las isotermas en el plano P–v. Grafique.
   iv) Grafique la presión como función del volumen molar y la temperatura. Considere s_0, V_0, U_0 y N_0 iguales a 1.

2. Para un sistema dado (Figura 1), la ecuación de las adiabatas es:

$$p^3V^5 = cte.$$

En el interior, hay una pequeña paleta manejada por un motor externo (por medio de un

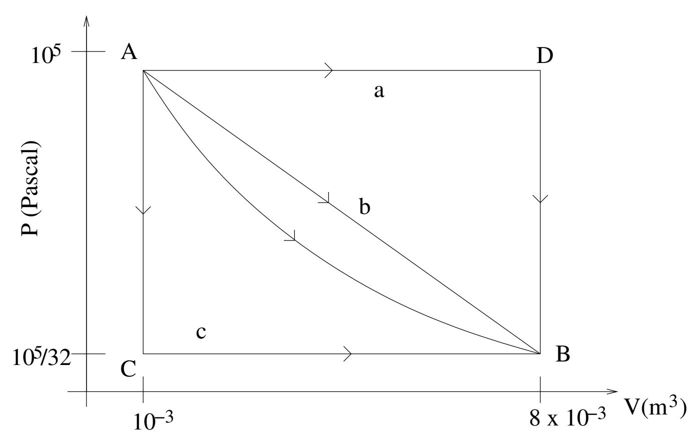

Figura 1:

acoplamiento magnético a través de las paredes). El motor ejerce un torque, haciendo girar la paleta a una velocidad angular ω, y se observa que la presión del gas (a volumen constante) crece a una razón dada por

$$\frac{dP}{dt} = \frac{2}{3}\frac{\omega}{V}\,\tau\,,$$

donde τ es el torque.

a) Demuestre que la diferencia de energía de cualquier par de estados puede ser determinada por este proceso. En particular, evalúe $U_C - U_A$ y también $U_D - U_B$.

Explique porque este proceso sólo puede proceder en una dirección, verticalmente hacia arriba en vez de hacia abajo en el gráfico P–V.

b) Muestre que cualquier par de estados (cualquier par de puntos en el plano P–V) pueden ser conectados por una combinación de los procesos descritos en el ejemplo anterior y la primera parte de este. En particular, evalúe $U_D - U_A$.

c) Calcule el trabajo W_{AD} en el proceso $A \to D$. Calcule la transferencia de calor Q_{AD}. Repítalo para $D \to B$, y para $C \to A$.

d) Calcule la energía del estado con P =5×10^4 Pa y $V = 8 \times 10^{-3}$ m^3.

3. Un sistema compuesto, aislado, consiste de 4 moles de una sustancia cuya entropía está dada por $S = 2A(UVN)^{1/3}$ y 2 moles de otra sustancia cuya entropía está dada por $S = A(U^2V^2/N)^{1/3}$, ocupando volúmenes de 4 m^3 y 2 m^3 respectivamente. Los dos sub-sistemas están separados por paredes rígidas, impermeables y diatérmicas. Si la energía total del sistema compuesto es 6 J,

   a) ¿Cuál es la energía individual de cada sub-sistema cuando se alcanza el equilibrio?

   b) Si la pared se reemplaza por un pistón diatérmico, ¿cuál será la energía y el volumen de cada sub-sistema en el equilibrio?

4. * **Fluido ideal de Van der Waals.** En una máquina particular un gas es comprimido en el golpe inicial del pistón. Mediciones de la temperatura instantánea, llevada a cabo durante la compresión, revela que la temperatura aumenta de acuerdo con :

$$T = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\eta} T_0\,,$$

   donde T_0 y V_0 son la temperatura y el volumen iniciales, y η es una constante. El gas se comprime al volumen V_1 (donde $V_1 < V_0$). Suponga que el gas es un fluido de Van der Waals, el proceso es cuasiestático y $\eta = -1/2$.

   a) Calcule el trabajo W hecho sobre el gas.

   b) Calcule el cambio en energía ΔU del gas.

   c) Calcule la transferencia de calor Q al gas (a través de los muros del cilindro) usando los resultados de 4*a* y 4*b*.

   Muestre que sus resultados para ΔU y para W (y entonces para Q) se reducen a los resultados correspondientes a un gas ideal monoatómico cuando las constantes de van der Waals a y b van a cero, y $c = \frac{3}{2}$. Recuerde que $\ln(a + x) \simeq x$, para un x pequeño.

5. * **Banda elástica.** La ecuación de estado de un cilindro elástico ideal es

$$\mathcal{T} = KT\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right)\,,$$

   siendo K una constante, y L_0, longitud correspondiente a la tensión nula, función solo de T. Demuéstrese que si el cilindro se estira reversible e isotérmicamente desde $L = L_0$ hasta $L = 2L_0$:

a) El calor transferido es

$$Q = -KTL_0\left(1 - \frac{5}{2}\alpha_0 T\right)$$

donde α_0, coeficiente de dilatación lineal a tensión nula, viene expresado por

$$\alpha_0 = \frac{1}{L_0}\frac{dL_0}{dT}.$$

b) La variación de energía interna es

$$\Delta U = \frac{5}{2}KT^2 L_0\alpha_0 \,.$$

c) Demuéstrese que el módulo de Young isotérmico, definido como Se define el *módulo de Young isotérmico* Y como

$$Y = \frac{L}{A}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial L}\right)_T ,$$

donde A es la sección del hilo, viene dado por

$$Y = \frac{KT}{A}\left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2}\right) .$$

d) Pruébese que el módulo de Young isotérmico para tensión nula es

$$Y_0 = \frac{3KT}{A}$$

e) Demuéstrese que el coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 1/L(\partial L/\partial T)_{\mathcal{T}}$ está dado por

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{\mathcal{T}}{AYT} = \alpha_0 - \frac{1}{T}\frac{L^3/L_0^3 - 1}{L^3/L_0^3 + 2} ,$$

siendo α_0 el valor del coeficiente de dilatación térmica para tensión nula, o sea

$$\alpha_0 = \frac{1}{L_0}\frac{dL_0}{dT} .$$

f) Supóngase para cierta muestra de caucho los valores siguientes: T = 300 K, K =1.33 $\times$ 10^3 dina/grado, A =1 mm^2 y $\alpha_0 = 5 \times 10^{-4}$ grado^{-1}. Calcúlense $\mathcal{T}$, Y y α para los siguientes valores de L/L_0: 0.5 , 1.0 , 1.5 , 2.0. Hállese gráficamente como dependen $\mathcal{T}$, Y y α de la razón L/L_0

6. * **Gas de fotones.**

a) Usando la ecuaciónes de estado de una gas de fotones $p = U/3V$ y $U = \sigma V T^4$, encuentre la energía libre de Helmholtz $F = F(T, V)$.

b) Considere un cilindro de paredes diatérmicas inmerso en un reservorio térmico a $T = 0°$ C. El cilindro tiene dos compartimientos a y b, separados por un pistón móvil, impermeable y adiabático. Los compartimientos contienen cada uno un gas de fotones, y sus volumenes iniciales son $V_a^i = 4$ lts y $V_b^i = 1$ lt. El pistón se mueve ahora de manera reversible a un volumen final $V_a^f = 2$ lts y $V_b^f = 3$ lts. ¿Cuál es el trabajo hecho por cada compartimiento en este proceso? ¿Cuál es el trabajo total hecho en este proceso? Comente.

7. * **Termodinámica de un agujero negro en (2+1).**

   La ecuación fundamental, $S = S(M, J)$, para el agujero negro BTZ, inventado el año 1992 en nuestro Departamento por Bañados, Teiltelboim y Zanelli (PRL **69**, 1849 (1992)) está dada por

$$S = \sqrt{\frac{1}{a}\left(M + \sqrt{M^2 - (\Omega_{ex} J)^2}\right)},$$

   donde $a = 2(\hbar/4\pi\ell)^2$, M es la masa, J es el momento angular y $\Omega_{ex} = 1/\ell$ es la velocidad angular del horizonte de eventos asociado a J. Por su parte, ℓ es el radio de curvatura.

   Para hacer la analogía con termodinámica, se asocia M con la energía interna U.

   a) Escriba la ecuación fundamental en la "formulación de masa", es decir, $M = M(S, J)$. Note que la primera ley puede escribirse $dM = TdS + \Omega dJ$. Calcule T y Ω.

   b) Escriba para este agujero negro la energía libre de Helmholtz, tanto en forma diferencial ($dF = ...$) como fundamental ($F = F(T, J)$)

   c) Repita la parte *b)* para el caso de la entalpía $H = H(S, \Omega)$.

   d) Repita la parte *b)* para el caso de la energía libre de Gibbs $G = G(T, \Omega)$.

8. **Estabilidad de un sistema abierto.** Considere un sistema cuyo volumen esta fijo, pero puede intercambiar energía y partículas con un reservorio (que está una temperatura y potencial químico determinado). Muestre explícitamente que para este sistema se cumple

   a) (2 pts.)

$$C_{V,N} \geq 0,$$

   b) (2 pts.)

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{V,S} \geq 0,$$

   c) (2 pts.)

$$\frac{C_{V,N}}{T}\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{V,S} \leq \left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)_{V,N}^2 .$$

   Indicación: Un potencial termodinámico útil para esta situación es el $\Omega = \Omega(T, V, \mu)$ (llamado gran canónico).