AYUDANTÍA XVII

GRUPOS Y ANILLOS (PRIMAVERA 2016)

En esta ayudantía desarrollaremos problemas de todo lo visto en anillos.

1.- **Problema 1:**
Sean A anillo sin uno. Sea $R = A \times \mathbb{Z}$ con suma usual y producto $(a, n)(b, m) = (ab + na + mb, nm)$. Asumiendo que R es anillo pruebe lo siguiente:

i.- Demuestre que R sí tiene uno.

ii.- Demuestre que A es isomorfo a un subanillo de R.

Desarrollo:

i.- Observe que $(0, 1) \in R$ cumple con $(0, 1)(a, n) = (0 + 1 \cdot a, n) = (a, n)(0, 1)$. Por lo tanto R es un anillo con unidad.

ii.- Considere el homomorfismo $\phi : A \to R$ definido por $\phi(a) = (a, 0)$. Dicha función es homomorfismo pues $\phi(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0)$ y $\phi(a)\phi(b) = (a, 0)(b, 0) = (ab, 0) = \phi(ab)$. Observe que $\ker(\phi) = \{0\}$. Por ello ϕ es inyectivo. Luego $A \cong Im(\phi)$ que es un subanillo de R.

i.- **Ejercicio:** Pruebe que el anillo R presentado anteriormente es un anillo.

2.- **Problema 2:**
Sea $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s} \in \mathbb{N}$.

i.- Demuestre que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z})^* \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p_s^{\alpha_s}\mathbb{Z})^*$.

ii. Determine la estructura del grupo de unidades $(\mathbb{Z}/90\mathbb{Z})^*$.

Desarrollo:

i.- Sabemos que $(a, b) \in A \times B$ es invertible si y solamente si existe (c, d) tal que $(ac, bd) = (a, b)(c, d) = (1, 1)$. Es decir $ac = 1$ y $db = 1$. Luego $(a, b) \in A \times B$ es invertible si y solamente si $a, b \in A$ son elementos invertibles. Es decir $(A \times B)^* = A^* \times B^*$. Por otro lado, si aplicamos el teorema chino de los restos tenemos que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p_s^{\alpha_s}\mathbb{Z})$. Luego si aplicamos el resultado anterior inductivamente, obtenemos que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z})^* \times \cdots \times (\mathbb{Z}/p_s^{\alpha_s}\mathbb{Z})^*$.

ii.- Usando el resultado anterior tenemos que $(\mathbb{Z}/90\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$. Pero $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* = \{1, 3\} \cong C_2$, pues es el único grupo de orden 2. Lo mismo para $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* = \{1, 2\} \cong C_2$. Por otro lado $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* = \{1, 2, 3, 4\}$ cumple con que $(2) = \{1, 2, 4, 3\}$. Luego $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \cong C_4$. Por lo tanto $(\mathbb{Z}/90\mathbb{Z})^* \cong C_2 \times C_2 \times C_4$.

2.- **Ejercicio:** Calcule $G = (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$. Demuestre que G no es un grupo cíclico.

3.- **Problema 3:**
Sea A anillo conmutativo con uno y $a_0, \cdots, a_n \in A$.

i.- Pruebe que si $a_0, \cdots, a_n$ son elementos nilpotentes entonces $p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n \in A[x]$ es un polinomio nilpotente.

ii.- Pruebe que si a_0, es invertible y $a_1, \cdots, a_n$ son elementos nilpotentes entonces $p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n \in A[x]$ es un polinomio invertible.
iii.- Concluya que $3x^2 + 6x + 1 \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}[x]$ es un polinomio invertible.

Demostración:

i.- Observe que si $a_i^{n_i} = 0$ entonces $(a_i x)^{n_i} = 0$. Luego $p(x)$ es suma de elementos nilpotentes. Como el conjunto de elementos nilpotentes es un ideal obtenemos que $p(x)$ es nilpotente.
ii.- Observe que si a_0 es invertible y $a_1, \cdots, a_n$ son nilpotentes entonces $p(x) = a_0 + q(x)$, donde $q(x)$ es nilpotente. Esto último debido a lo mostrado en [i]. Luego, como toda suma de un elemento nilpotente con un elemento invertible es invertible en un anillo conmutativo, obtenemos que $p(x)$ es invertible.
iii.- Sabemos que $3, 6 \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ son elementos nilpotentes. Luego como 1 es invertible tenemos por [ii] que $3x^2 + 6x + 1 \in \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}[x]$ es un polinomio invertible.

3.- **Ejercicio:** Pruebe que si $p(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n \in A[x]$ es nilpotente entonces $a_0, \cdots, a_n \in A$ son elementos nilpotentes.

4.- **Problema 4:**
Encuentre condiciones sobre $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ necesarias y suficientes para que $\mathbb{C}[x]/(p(x))$ sea cuerpo.

Desarrollo: Sea $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio cualquiera de grado n. Entonces como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, tenemos que $p(x)$ tiene todas sus raices en $\mathbb{C}$. Luego $p(x) = (x - z_1) \cdots (x - z_n)$, para ciertos $z_i \in \mathbb{C}$. Agrupemos los términos iguales en la factorización de $p(x)$. Así tenemos que $p(x) = (x - z_1)^{n_1} \cdots (x - z_k)^{n_k}$. Observe que si $z_i \neq z_j$ entonces $(x - z_i) + (z - x_j) = \mathbb{C}[x]$. Por lo tanto, por teorema chino de los restos tenemos que $\mathbb{C}[x]/(p(x)) \cong \mathbb{C}[x]/((x-z_1)^{n_1}) \times \cdots \times \mathbb{C}[x]/((x-z_k)^{n_k})$. Si dicho anillo es un cuerpo entonces $k = 1$. Además en ese caso, para que no existan elemento nilpotentes en el anillo se requiere que $n_1 = 1$. Por ello $p(x) = x - z_1$. En dicho caso $\mathbb{C}[x]/(p(x)) \cong \mathbb{C}$. Luego la condición necesaria y suficiente para que el cociente anterior sea cuerpo es que el grado del polinomio $p(x)$ sea 1.

4.- **Ejercicio:** Demuestre que el ideal $M = (x - 1, y + 2)$ es un ideal maximal de $\mathbb{C}[x][y]$.