AYUDANTÍA XVI

GRUPOS Y ANILLOS (PRIMAVERA 2016)

En esta ayudantía desarrollaremos problemas de todo lo visto en anillos.

1.- **Problema 1:**
Sean I, J ideales de A un anillo conmutativo con uno.
i.- Demuestre que si $I + J = A$ entonces $I \cap J = IJ$.
ii.- Demuestre que si $I + J = A$ entonces $I^2 + J^2 = A$.

Desarrollo:
i.- Observe que siempre $IJ \subset I \cap J$. Esto se debe a que cualquier elemento $\sum_{i=1}^{r} a_i b_i \in I, J$, para $a_i \in I$ y $b_j \in J$. Esto último se debe a que I, J son ideales biláteros. Por otro lado si $I + J = A$ entonces exiten $a \in I$, $b \in J$ tales que $a + b = 1$. Considere $c \in I \cap J$ entonces $c = ca + cb = ac + cb \in IJ$.
ii.- Para mostrar que $A = I^2 + J^2$ basta probar que $1 = x + y$, con $x \in I^2$ e $y \in J^2$. Pero sabemos que $1 = a + b$ para $a \in I$ y $b \in J$. Luego $1 = a^2 + b^2 + ab + ba \in I^2 + J$. Por lo tanto $I^2 + J = A$. Repitiendo el mismo argumento para subir el exponente de J, obtenemos que $I^2 + J^2 = A$.

1.- **Ejercicio:** Encuentre ideales I, J de un anillo A tal que $IJ \subsetneq I \cap J$.

2.- **Problema 2:**
Considere $\mathbb{C}[x]$ el anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$.
i.- Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Pruebe que $\mathbb{C}[x]/((x-1)^n)$ no es producto de anillos no triviales.
ii. Demuestre que $\mathbb{C}[x]/(x^2 - 1)$ es un producto de anillos. Encuentre su descomposición.

Desarrollo:
i.- Considere $p(x)$ polinomio en $\mathbb{C}[x]$. Entonces $(x-1)|p(x)$ o bien $p(x)$ y $(x-1)$ son relativamente primos. En el primer caso tenemos que $\overline{p(x)^n} = \overline{0}$ y en el segundo $\overline{p(x)}$ es invertible en $A = \mathbb{C}[x]/((x-1)^n)$. Mostremos que A no tiene elementos idempotentes no triviales. En efecto si $\overline{p(x)}$ es idempotente tenemos que $\overline{p(x)}^2 = \overline{p(x)}$. Supongamos que $\overline{p(x)}$ es nilpotente y no nulo. Considere $N = \min\{n \in \mathbb{Z}_{>0} : \overline{p(x)}^n = 0\}$ entonces $0 = \overline{p(x)}^N = \overline{p(x)}^{N-1}$, lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto $\overline{p(x)} = \overline{0}$. Supongamos ahora que $\overline{p(x)}$ es invertible, entonces multiplicando por su inverso la relación de idempotencia, obtenemos que $\overline{p(x)} = \overline{1}$. Luego A no tiene elementos idempotentes no triviales. Por ello A no es producto de anillos no triviales.
ii.- Sabemos que $(x^2 - 1) = (x-1)(x+1)$, donde $(x-1) + (x+1) = \mathbb{C}[x]$. Por lo tanto por teorema chino de los restos, tenemos que $\mathbb{C}[x]/(x^2 - 1) \cong \mathbb{C}[x]/(x-1) \times \mathbb{C}[x]/(x+1) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

3.- **Problema 3:**
Sea A anillo conmutativo con uno y $\mathfrak{N}(A)$ su nilradical. Pruebe que son equivalentes los siguientes hechos:
i.- A tiene un solo ideal primo.
ii.- Todo elemento de A es unidad o nilpotente.
iii.- $A/\mathfrak{N}(A)$ es un cuerpo.

Demostración:
i-ii .- Supongamos que $x \in A$ no es un elemento invertible. Entonces $x \in P$ para P el único ideal maximal de A, que a su vez es un ideal primo. Observe que $P = \mathfrak{N}(A)$. Luego $x \in A$ es nilpotente.
ii-iii .- Observe que $A/\mathfrak{N}(A)$ es un anillo conmutativo con uno. Sea $\overline{x} \in A/\mathfrak{N}(A)$ elemento no nulo. Entonces $x \notin \mathfrak{N}(A)$. Luego $x \in A$ es invertible, es decir existe $y \in A$ tal que $xy = 1$ en A. Por ello $\overline{xy} = \overline{1}$. Esto implica que $A/\mathfrak{N}(A)$ es cuerpo.
iii-i .- Si $A/\mathfrak{N}(A)$ es un cuerpo entonces $\mathfrak{N}(A)$ es un ideal maximal, en particular primo. Supongamos que existe otro ideal primo $P \subset A$ entonces $\mathfrak{N}(A) \subset P \subsetneq A$. Por la maximalidad de $\mathfrak{N}(A)$ tenemos que $P = \mathfrak{N}(A)$. Por ello A tiene un solo ideal maximal.

3.- **Ejercicio:** Sea $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Pruebe que $\mathbb{C}[x]/((x-1)^n)$ tiene un solo ideal primo. Calculelo. Muestre que el nilradical de este anillo es un ideal maximal.

4.- **Problema 4:**
Sea $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Encuetre $a, b \in \mathbb{Z}[w]$ tales que $a(2+w) + b(3+2w) = 1$. No use algoritmo de división.

Desarrollo: Emplearemos la norma compleja restringida a $\mathbb{Z}[w]$, donde $w = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Observe que $z = a+bw$ cumple con $N(z) = (a+bw)(a+b\overline{w}) = \left(\left(a - \frac{b}{2}\right) + \frac{b\sqrt{-3}}{2}\right)\left(\left(a - \frac{b}{2}\right) - \frac{b\sqrt{-3}}{2}\right) = a^2 - ab + b^2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Luego $N(2+w) = 4$ y $N(3+2w) = 7$. Ahora bien, dichos números son coprimos en $\mathbb{Z}$. De hecho $1 = 7 - 2 \cdot 3$. Por otro lado sabemos que $\overline{w} = w^2 = -1-w$, por lo tanto $1 = (3+2w^2)(3+2w) - 2(2+w^2)(2+w) = (1-2w)(3+2w) - 2(1-w)(2+w)$. Luego $a = -2 + 2w$ y $b = 1 - 2w$.

4.- **Ejercicio:** Replique lo mismo para la ecuación $a(2+i) + b(5+i) = 1$ en $\mathbb{Z}[i]$.