AYUDANTÍA XV

GRUPOS Y ANILLOS (PRIMAVERA 2016)

En esta ayudantía seguiremos estudiando los dominios euclideanos. Haremos una miselanea de ejercicios.

1.- **Problema 1:**
Demuestre que $2+i$ y $2-i$ son relativamente primos en $\mathbb{Z}[i]$. Utilice esto para probar que el caballo recorre todo el tablero de ajedréz infinito.

Desarrollo: Observe que $2+i-(2-i)=2i$. Luego si $d=mcd(2+i,2-i)$ tenemos que d divide a $2i$. Por lo tanto $N(d)$ divide a 4. Por otro lado d divide a $2+i$, por lo tanto $N(d)$ divide a 5. Esto implica que $N(d)=1$. Luego $d\in\{\pm1,\pm i\}$. Por lo tanto $2+i$ y $2-i$ son relativamente primos. Supongamos ahora que C es el conjunto que describe las posbibles coordenadas del caballo en el tablero. Identifiquemos la segunda coordenada con $i\in\mathbb{C}$. Luego el tablero infinito se identifica con el reticulado $\mathbb{Z}[i]$. Observe que, componiendo los movimientos del caballo, en C están todos los elementos de la forma $a(2+i)$, $b(2+i)$, $c(2i+1)$, $d(2i-1)$, donde $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Por lo tanto $(2+i,2-i)\subset C$. Pero $(2+i,2-i)=\mathbb{Z}[i]$. Luego $C=\mathbb{Z}[i]$. Por lo anto el caballo recorre todo el tablero de ajedréz.

1.- **Ejercicio:** Suponga que el caballo de puede mover de a 4 casillas en linea recta y luego girar en noventa grados para moverse una casilla más. Describa los puntos en el tablero infito a los cuales puede llegar dicho caballo.

2.- **Problema 2:**
Encuentre la factorización en primos de $6\in\mathbb{Z}[w]$, para $w=e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Desarrollo: Observe que $6=2\cdot3$ en $\mathbb{Z}[w]$. Luego por la unicidad de la factorización basta encontrar la descomposición en primos de 2 y 3 en $\mathbb{Z}[w]$. Para comenzar, observe que $\mathbb{Z}[w]/(2)\cong\mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1,2)\cong\mathbb{F}_2[x]/(x^2+x+1)$. Ahora bien $p(x)=x^2+x+1$ genera un ideal maximal ya que $p(x)$ no se factoriza en $\mathbb{F}_2[x]$. Esto último se debe a que $p(X)$ no tiene raices en $\mathbb{F}_2$. Por lo tanto $\mathbb{Z}[w]/(2)$ es un cuerpo, luego 2 es un elemento primo en $\mathbb{Z}[w]$. Por otro lado, tenemos que $\mathbb{Z}[w]/(3)\cong\mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1,3)\cong\mathbb{F}_3[x]/(x^2+x+1)=\mathbb{F}_3[x]/((x-1)^2)$. Por teorema de correspondencia los ideales maximales que contienen a (3) son los ideales de $\mathbb{Z}[w]/(3)$. Estos últimos ideales están en correspondencia con los elementos en $\mathbb{Z}[w]$ que dividen a 3. Observe que el único ideal no trivial de $\mathbb{F}_3[x]/((x-1)^2)$ es $(x-1)/((x-1)^2)$. Tomando preimagen vía los isomorfismos anteriores obtenemos que $3\in(w-1)$. De hecho $3=w(1-w)^2$, donde $\mathbb{Z}[w]/(w-1)\cong\mathbb{F}_3$. Por lo tanto $w-1$ es un elemento primo de $\mathbb{Z}[w]$. Esto prueba que la descomposición de $6\in\mathbb{Z}[w]$ es $6=w2(w-1)^2$, donde $w\in\mathbb{Z}[w]^*$.

2.- **Ejercicio:** Encuentre la factorización en primos de $210 \in \mathbb{Z}[w]$, para $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

3.- **Problema 3:**
Muestre que todo ideal bilátero de $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ es principal.

Demostración: Sabemos que todo ideal bilátero I de $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ es de la forma $I = \mathbb{M}_2(J)$, donde J es un ideal de $\mathbb{Z}$. Pero como $\mathbb{Z}$ es un dominio euclideano, tenemos que $J = N\mathbb{Z}$, para cierto $N \in \mathbb{Z}$. Luego $I = \mathbb{M}_2(N\mathbb{Z}) = (N\text{id})\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$. Por lo tanto el ideal I es principal.

4.- **Problema 4:**
Demuestre que en el anillo $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ se cumple que toda cadena ascendente de ideales tiene un elemento maximal. Es decir, toda familia de ideales $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(A)$, que cumple con:

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots I_n \subseteq \cdots$$

tiene un elemento maximal I_m tal que $I_m = I_n$, $\forall n \geq m$.

Demostración: Observe que por lo visto en la ayudantía anterior $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un dominio euclideano (DE), luego este es un dominio de ideales principales. Considere el ideal $I = \cup_{i\in\mathbb{N}} I_i$. Como A es DIP, tenemos que existe $a \in A$ tal que $I = (a)$. Luego $a \in I_m$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $I_m \subseteq I \subseteq I_m$. Esto es equivalente a que $I = I_m$. En otras palabras $I_m = I_i$, para cualquier $i \geq m$.

4.- **Ejercicio:** Pruebe que la condición de que toda cadena ascendente de ideales de A tenga un elemento maximal es equivalente a que todo ideal de A sea finitamente generado.