AYUDANTÍA XII

GRUPOS Y ANILLOS (PRIMAVERA 2016)

En esta ayudantía estudiaremos ideales primos y maximales. Además se analizará el nilradical $\mathfrak{N}(A)$ y el radical de Jacobson $J(A)$ de ciertos anillos A.

1.- **Problema 1:**
El siguiente problema tiene por objetivo determinar el radical de Jacobson y el nilradical de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sea A, A_1, A_2 anillos conmutativos con 1.

i.- Pruebe que $I \subset A_1 \times A_2$ es un ideal primo si y solamente si $I = A_1 \times P_2$ o $I = P_1 \times A_2$, para $P_1 \subset A_1$, $P_2 \subset A_2$ ideales primos.

ii.- Demuestre que $P \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un ideal primo si y solamente si P es maximal.

ii.- Concluya que $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = J(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

iv.- Pruebe que $\mathfrak{N}(A_1 \times A_2) = \mathfrak{N}(A_1) \times \mathfrak{N}(A_2)$.

v.- Calcule $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Desarrollo:

i.- Observe que $A_1 \times A_2$ es un anillo conmutativo con uno. POr lo tanto $I = I_1 \times I_2$ ideal de $A_1 \times A_2$ es un ideal primo si y solamente si $A_1 \times A_2/(I_1 \times I_2)$ es un dominio de integridad. Pero $A_1 \times A_2/(I_1 \times I_2) \cong A_1/I_1 \times A_2/I_2$ es un dominio de integridad si uno de los factores es nulo y el otro es un dominio de integridad. Luego $I = A_1 \times P_2$ o $I = P_1 \times A_2$, para $P_1 \subset A_1$, $P_2 \subset A_2$ ideales primos.

ii.- Recoredemos que por teorema de correspondencia $P = m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Luego $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/P \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es un dominio de integridad si y solamente si m es primo. Es así como $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/P$ es cuerpo. Luego P es un ideal maximal. Por otro lado todo ideal maximal, en un anillo conmutativo con unidad, es un ideal primo.

iii.- Como sabemos $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \cap_{P \text{ primo}} P$ y $J(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \cap_{M \text{ maximal}} M$. Luego como los ideales primo y maximales del anillo en cuestión son iguales, tenemos que $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = J(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

iv.- Como sabemos $\mathfrak{N}(A_1 \times A_2) = \cap\{P : P \subset A_1 \times A_2 \text{ primo}\}$. Pero los ideales primos de $A_1 \times A_2$ son de la forma $I = A_1 \times P_2$ o $I = P_1 \times A_2$, para $P_1 \subset A_1$, $P_2 \subset A_2$ ideales primos. Luego $\mathfrak{N}(A_1 \times A_2) = \cap\{P : P \subset A_1 \text{ primo}\} \times \cap\{P : P \subset A_2 \text{ primo}\} = \mathfrak{N}(A_1) \times \mathfrak{N}(A_2)$.

v.- Por el teorema chino de los restos tenemos que si $n = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$ entonces $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_n^{a_n}\mathbb{Z}$. Aplicando [iv] tenemos que $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathfrak{N}(\mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z}) \times \cdots \times \mathfrak{N}(\mathbb{Z}/p_n^{a_n}\mathbb{Z})$. Pero por lo calculado en al ayundatía anterior sabemos que $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) = p\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$, para todo p primo y $r > 0$. Luego $\mathfrak{N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong p_1\mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times p_n\mathbb{Z}/p_n^{a_n}$.

1.- **Ejercicio:** Calcule el nilradical y el radical de Jacobson de $\mathbb{Z}$. Demuestre que ambos ideales coinciden.

2.- **Problema 2:**
Pruebe que $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Q} \right\}$ es un ideal del anillo no conmutativo $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$. Demuestre que I no es un ideal primo.

Demostración: Considere el homomorfismo $\phi : A \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definido por $\phi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = (a, c)$. Observe que ϕ es un homorfismo sobreyectivo y $\ker(\phi) = I$. Luego I es un ideal bilátero de A tal que $A/I \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Observe que A no es un anillo conmutativo por ello no podemos aplicar el criterio que nos dice que I ideal primo si y solamente si A/I es un dominio de integridad. Pero si podemos extraer las mismas ideas que estan en su demostración. Observe que A/I tiene divisores de O. Por elemplo $(1, 0)$ y $(0, 1)$ cumplen con esto. Tomando las preimagenes de estos elementos vía ϕ obetenmos que $x = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin I$, para cualquiera $b, b' \in \mathbb{Q}$. Pero su producto $xy = \begin{pmatrix} 0 & b + b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$. Luego I no es un ideal primo.

3.- **Problema 3:**
Sea $I = (3) \subset \mathbb{Z}[i]$. Demuestre que I es un ideal primo de $\mathbb{Z}[i]$. Pruebe que I es también un ideal maximal.

Demostración: Para demostrar esto debemos clacular en cociente $\mathbb{Z}[i]/I$. Observe que $\mathbb{Z}[i]/(3) \cong \mathbb{Z}[x]/(3, x^2 + 1)$, ya que $\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$ y $(3) \cong (3, x^2 + 1)/(x^2 + 1)$. Donde ambos isomorfismos se establecen vía la evaluación en i. Luego:

$$\mathbb{Z}[i]/(3) \cong \left(\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)\right) / \left((3, x^2 + 1)/(x^2 + 1)\right).$$

Pero si usamos el tercer teorema de isomorfía obetenemos que:

$$\left(\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)\right) / \left((3, x^2 + 1)/(x^2 + 1)\right) \cong \mathbb{Z}[x]/(3, x^2 + 1).$$

Si usamos nuevamente el tercer teorema de isomorfía obtenemos que:

$$\mathbb{Z}[i]/(3) \cong \mathbb{F}_3[x]/(1 + x^2).$$

Pero $(x^2 + 1)$ es un ideal maximal en $\mathbb{F}_3$ pues si no fuese así $p(x) = x^2 + 1$ se escribiría como dos factores de grado 1 en $\mathbb{F}_3$. Luego $p(x)$ tendría raices en $\mathbb{F}_3$. Pero esto último no sucede pues $p(1) = p(-1) = 2$ y $p(0) = 1$. Luego $\mathbb{F}_3[x]/(1 + x^2)$ es cuerpo. Por lo tanto $I = (3)$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z}[i]$, en particular es un ideal primo de dicho anillo.

3.- **Ejercicio:** Sea $I = (5) \subset \mathbb{Z}[i]$. Demuestre que I no es un ideal primo de $\mathbb{Z}[i]$. Calcule el cociente $\mathbb{Z}[i]/I$.

4.- **Problema 4:**
Sea $A = \mathbb{C}[x]/(x^2 - 3x + 2)$.

i.- Encuentre los ideales primos y maximales de A.

ii.- Calcule $\mathfrak{N}(A)$ y $J(A)$.

Desarrollo:

i.- Primero reescribamos el anillo A. Observe que $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, donde $1=(x-1)-(x-2)$. Por lo tanto $(x^2-3x+2)=(x-1)(x-2)$ donde $(x-2)+(x-1)=\mathbb{C}[x]$. Aplicando teorema chino de los restos obtenemos $A\cong\mathbb{C}[x]/(x-1)\times\mathbb{C}[x]/(x-2)\cong\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Luego debemos encontrar los ideales primos y maximales de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Aplicando lo dicho en el problema 1 tenemos que $\{\mathbb{C}\times\{0\},\{0\}\times\mathbb{C}\}$ es el conjunto de ideales primos, el cual coincide con el conjunto de ideales maximales de A módulo isomorfismo. De hecho, dicho conjunto de ideales corrsponde en A a $\{(x-1)/(x^2-3x+2),(x-2)/(x^2-3x+2)\}$.

ii.- Como sabemos $\mathfrak{N}(A)=\cap_{P\text{ primo}}P$ y $J(A)=\cap_{M\text{ maximal}}M$. Luego $J(A)=\mathfrak{N}(A)=\{0\}$.

5.- **Problema 5:**
Sea A anillo conmutativo con 1 tal que para todo $x\in A$ se tiene que $x^n=x$, para $n>1$. Pruebe que todo ideal primo de A es maximal.

Demostración: Sea P un ideal primo de A. Entonces A/P es un dominio de integridad. Sea $x\in A$ tal que $x\notin P$, es decir $\overline{x}\in A/P$ es no nulo. Luego, como $x^n=x$ en A, tomando clases de los elementos en el cociente obtenemos que $\overline{x}^n=\overline{x}$. Es así como obtenemos que $\overline{x}(\overline{x}^{n-1}-\overline{1})=\overline{0}$. Luego como A/P es dominio de integridad y $\overline{x}\neq\overline{0}$ tenemos que $\overline{x}\overline{x}^{n-2}=\overline{1}$. Por lo tanto en el anillo conmutativo A/P todo elemento no nulo es invertible. Luego A/P es cuerpo, equivalentemente P es un ideal maximal.

5.- **Ejercicio:** un anillo A se dice **Booleano** si $x^2=x$, para todo $x\in A$. Muestre que todo ideal $P\subset A$ primo es maximal y que A/P es un cuerpo con dos elementos.