AYUDANTÍA XIII

GRUPOS Y ANILLOS (PRIMAVERA 2016)

En esta ayudnatía estudiaremos los dominios euclideanos.

1.- **Problema 1:**
Muestre que $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un dominio euclideano.

Demostración: Considere $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \neq 0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Considere $\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{ac-2bd+(ad+bc)\sqrt{2}}{c^2-2d^2}$. Renombrando los elementos , podemos decir que $\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = s + t\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Tomemos $x, y \in \mathbb{Z}$ numeros más proximos a s, t respectivamente, entonces $|x - s| \leq \frac{1}{2}, |y - t| \leq \frac{1}{2}$. Considere $x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Entonces obtenemos el candidado a resto:

$$r = a + b\sqrt{2} - (c + d\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}].$$

Observe que dicho candidato cumple con:

$$N(r) = N(c + d\sqrt{2})N((s + t\sqrt{2}) - (x + y\sqrt{2})),$$

de esto se sigue que:

$$N(r) = N(c + d\sqrt{2})[(s - x)^2 - 2(t - y)^2] \leq \frac{3}{4}N(c + d\sqrt{2}).$$

Por lo tanto $N(r) < N(c + d\sqrt{2})$. Luego r es un resto. Esto demuestra que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es dominio euclideano.

1.- **Ejercicio:** Pruebe que $\mathbb{Q}[w][x]$ es un dominio euclieano, donde $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

2.- **Problema 2:**
Escriba $I = (x + 3, x^5 + 7) \subseteq \mathbb{R}[x]$ como un ideal principal.

Desarrollo: Para encontrar un generador del grupo hay que aplicar el algoritmo de división entre $x+3$ y x^5+7 de forma de escribir $I = (x+3, c)$, donde $c \in \mathbb{R}$. En efecto $x^5 + 7 = (x + 3)(x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81) - 236$. Luego $I = (x + 3, -236) = \mathbb{R}[x]$, pues I contiene al elemento -236 que es invertible en $\mathbb{R}[x]$. Concluimos que $I = (1)$.

2.- **Ejercicio:** Escriba $(x^2 - nx + n, x^2 - mx + m) \subseteq \mathbb{R}[x]$ como un ideal principal, dependiendo de los valores de $n, m \in \mathbb{R}$.

3.- **Problema 3:**
Sea A un dominio de integridad, tal que $A[x]$ es un dominio de ideales principales. Es decir en $A[x]$ todo ideal es principal.

i.- Demuestre que A es cuerpo.

ii.- ¿Es $\mathbb{Z}[i][x]$ dominio de ideales principales?

3.- **Desarrollo:**

i.- Considere $I = (x)$ ideal de $A[x]$. La estrategia para atacar este problema es demostrar que I es un ideal primo de $A[x]$, luego como $A[x]$ es DIP, se tiene que este ideal es maximal. En efecto, por lo visto en una de las primeras ayudantias de anillos:

$$A[x]/I \cong A$$

Con A dominio de integridad. Luego como el anillo de partida es conmutativo con 1 y $A[x]/I$ es dominio de integridad ,tenemos que I es ideal primo. Como $A[x]$ es DIP se concluye que I es maximal. Luego el cociente $A[x]/I \cong A$ es cuerpo.

ii.- Por último si $\mathbb{Z}[i][x]$ fuese DIP entonces por lo anterior $\mathbb{Z}[i]$ es un cuerpo, pero esto es falso. De hecho el grupo de elementos invertibles en el anillo de enteros gaussianos es $\mathbb{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\}$.

4.- **Problema 4:**
Encuentre todos los ideales maximales $I \subseteq \mathbb{Z}[i]$ tales que $17 \in I$.

Desarrollo: Supongamos que I es un ideal maximal tal que $17 \in I$. Como $\mathbb{Z}[i]$ es un DIP tenemos que $I = (z)$, cierto $z \in \mathbb{Z}[i]$. Luego si $17 \in I$ tenemos que $z|17$. De hecho $z|17$ si y solamente si $17 \in (z)$. Pero $17 = (4+i)(4-i)$. Luego $4+i \in I$ o $4-i \in I$, pues I es maximal, en particular un ideal primo. Es decir $(4-i) \subseteq I$ o bien $(4+i) \subseteq I$. Por otro lado $(4 \pm i)$ cumple con $\mathbb{Z}[i]/(4 \pm i) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2+1, 4 \pm x) \cong \mathbb{Z}/(16+1) \cong \mathbb{F}_{17}$. Luego $(4 \pm i)$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z}[i]$. Por lo tanto $I = (4+i)$ o bien $I = (4-i)$. En particular, esto nos dice que los únicos divisores no triviales de 17 en $\mathbb{Z}[i]$ son $4+i$ y $4-i$.

4.- **Ejercicio:** Encuentre todos los ideales maximales $I \subseteq \mathbb{Z}[w]$ tales que $2 \in I$, donde $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.